К ВОПРОСУ О КОЛИЧЕСТВЕННОМ СОДЕРЖАНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ БЛИЗНЕЦОВ В НАТУРАЛЬНОМ РЯДЕ ЧИСЕЛ

Баяндин А.В.
ИФиПР СО РАН,
630090, г. Новосибирск, ул. Николаева -8,
Bajandin@philosophy.nsc.ru
Сектор философии науки: (3832)-30-52-35

Третий век до н. э. украшен славными именами Аристарха и Архимеда, Эратосфена и Аполлония. Все они были скорее универсалы, чем "чистые" математики. Аристарха считают астрономом, поскольку он первый обосновал гипотезу о том, что все планеты обращаются вокруг Солнца. Но рассуждение Аристарха - это чистая стереометрия, в духе Анаксагора. Разница в том, что Аристарх изначально предположил: Солнце может иметь иной размер, чем Луна! Так в старой задаче появилась новая неизвестная величина. Чтобы справиться с нею, нужно добавить еще одно уравнение, а для этого - изобрести новый метод наблюдения небес. Аристарх сделал это, рассуждая просто и красиво. Земля, Луна и Солнце - это три шара; их центры лежат в одной плоскости. Когда мы видим ровно половину лунного диска, освещенную Солнцем - луч нашего зрения образует прямой угол с осью, соединяющей центры Солнца и Луны. Чтобы узнать отношение сторон в этом огромном прямоугольном треугольнике, надо измерить в нем хоть один угол. Мы можем это сделать, наблюдая Солнце и Луну одновременно - на рассвете, или на закате. Выполнив эти наблюдения и расчеты, Аристарх сделал вывод: лунный диаметр втрое меньше земного, а диаметр Солнца в семь раз больше, чем диаметр Земли. Эти оценки так же грубы, как расчеты Анаксагора. Но верен главный вывод Аристарха: Солнце больше Земли, поэтому Земля вращается вокруг Солнца! Так астрономия получила, наконец, от геометрии верную модель Солнечной системы. Увы - модель Аристарха оказалась слишком груба для астрономических предсказаний. Поэтому большинство звездочетов не верили ей, а пользовались более могучей вычислительной техникой Гиппарха. Большее доверие вызывал у своих современников ученик Аристарха - Эратосфен. Эратосфен Киренский (Eratosthénes) (около 276-194 до н. э.), древнегреческий учёный. Родился в Кирене. Образование получил в Александрии и Афинах. Заведовал Александрийской библиотекой (после смерти Каллимаха). Работал во многих отраслях древней науки. Ученики дали ему прозвище "Бета" - по имени второй буквы алфавита, поскольку Эратосфен был "вторым специалистом" в очень многих областях. "Альфой" в математике был его лучший друг и ровесник - Архимед из Сиракуз (280-212 годы до н.э.) В арифметике Эратосфен стал вторым гроссмейстером - после Евклида. Он составил первую таблицу простых чисел ("решето Эратосфена") и предложил интересный метод нахождения простых чисел на интервале [2, n]. Эратосфен написал на папирусе натянутом на рамке все числа от 1 до 1000 и прокалывал составные числа. Папирус стал как решето, которое "просеивает" составные числа, а простые оставляет. Поэтому такой метод и получил название решета Эратосфена. Эратосфена решето как теоретический метод исследования в теории чисел был введён в 1920 норвежским математиком В. Вруном.[1]

Как же Эратосфен прокалывал числа? Первое простое число - 2, поэтому первым проходом прокалываются все числа больше 2-ух и кратные 2-ум. Следующим простым числом будет первое не проколотое число большее 2, то есть 3. Далее вторым проходом прокалываются все числа больше 3-ёх и кратные 3-ём. Получаем новое простое ещё не вычеркнутое число - 5. Таким образом, процесс повторяется, пока не будут найдены все числа в заданном промежутке.

Таблица 1. “Просеивание” простых чисел «решетом» Эратосфена

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
2	3	x	5	x	7	x	9	x	11	x	13	x	15	x	17	x	19	...
2	**3**	x	5	x	7	x	x	x	11	x	13	x	x	x	17	x	19	...
...																		
2	**3**	x	**5**	x	**7**	x	x	x	**11**	x	**13**	x	x	x	**17**	x	**19**	...

Эратосфен заметил, что многие простые числа группируются в пары близнецов: таковы 11 и 13, 29 и 31, 41 и 43.

Теория простых чисел богата древнейшими нерешенными проблемами. Последовательность простых чисел подчиняется какой-то плохо различимой закономерности, и простые числа живут по собственным правилам. Их сравнивают с сорной травой, случайным образом распределенной среди натуральных чисел. Перебирая одно за другим натуральные числа, можно набрести на области, богатые простыми числами, но, по неизвестной причине, другие области оказываются совершенно пустыми. Математики веками пытались разгадать закон, по которому распределены простые числа, и всякий раз терпели поражение. Возможно, никакого закона не существует, и распределение простых чисел случайно по самой своей природе.

Например, две тысячи лет назад Евклид доказал, что запас простых чисел неисчерпаем. Верно ли то же самое для чисел-близнецов? Эта задача не покорилась Эратосфену. Знать бы ему и его насмешливым питомцам, что она не будет решена даже через 22 столетия! В наши дни "проблема близнецов" остается единственной не решенной задачей, которая досталась нам от Античности. Справятся ли с нею математики 21 века?[2] Последние два столетия математики пытались доказать, что запас простых чисел-близнецов также неисчерпаем. Под числами–близнецами понимают пары простых чисел, отличающиеся на 2, и являющиеся ближайшими соседними простыми числами (простые числа не могут отличаться на 1, иначе одно из них должно было бы быть четным). Примерами небольших простых чисел-

[1] http://penza.fio.ru/personal/21/2/1/Eratosfen1.htm

[2] http://server2.fio.by/fio_work/Works/TerentevAV/h5.htm

близнецов могут служить (5, 7), (11, 13) и (17, 19), примерами больших чисел-близнецов — (22271, 22273), (10 006 427, 10006429) и (1 000 000 000 061, 1 000 000 000 063). Существуют веские основания полагать, что множество простых чисел-близнецов бесконечно, но никому пока не удалось доказать, что это действительно так.

Самый большой прорыв к доказательству так называемой гипотезы простых чисел произошел в 1966 году, когда китайскому математику Чену Джинграну удалось показать, что существует бесконечное множество пар простых и почти простых чисел. У настоящих простых чисел нет делителей (отличных от самого числа и единицы), а почти простые числа уступают простым самую малость: у них существуют только два простых делителя. Например, число 17 простое, а число 21 (=3·7) — почти простое. Что же касается таких чисел, как 120 (=2·3·4·5), то они не простые и не почти простые, так как их можно представить в виде произведения нескольких простых множителей. Чен доказал, что существует бесконечно много случаев, когда простое число имеет в качестве близнеца либо другое простое число, либо почти простое число. Тот, кому удастся продвинуться еще на один шаг и снять оговорку «почти», совершит величайший прорыв в теории простых чисел со времен Евклида [1].

На сегодняшний день существует не мало различных алгоритмов поиска простых чисел или их проверки на простоту. Предлагаются новые методы оценки неисчерпаемости чисел-близнецов. Тем не менее, до сих пор эта задача остаётся не тривиальной. Математики и программисты пытаются найти всё более надежные и быстрые методы.

Здесь уместно привести выдержки из недавно опубликованных в Интернете информационных статей по продвижению в решении проблемы простых чисел и чисел-близнецов.

Так, в разделе «Новости» сайта http://www.cryptography.ru в августе 2002г. была опубликована заметка о новом сенсационном результате в алгоритмической теории чисел, достигнутым индийскими математиками.

На самом деле речь идёт о другой задаче - проверке целых чисел на простоту. Сам результат официально ещё не опубликован, так что доступная на данный момент статья (Manindra Agrawal, Neeraj Kayal, Nitin Saxena. PRIMES is in P.) по-видимому, должна рассматриваться как предварительный вариант. (Ссылка на статью - http://www.cse.iitk.ac.in/news/primality.pdf, 213 кб, 9 страниц.)

Результат таков: предложен полиномиальный детерминированный алгоритм проверки целых чисел на простоту. Его асимптотическая сложность есть $O\sim((\log n)^{12})$, где n - проверяемое целое число, а $O\sim(n)$ - сокращённое обозначение для $O(t(n)poly(\log(t(n)))$. Тем самым положительно решён остававшийся до сих пор открытым вопрос о принадлежности задачи распознавания простоты классу P. Высокий показатель степени (12) - это верхняя граница, которую удалось доказать авторам. Представляется, что реальная трудоёмкость алгоритма должна быть ниже.

«Мы надеемся, что в ближайшем будущем на нашем сайте появится более обстоятельный комментарий к данной работе, написанный специалистами по теории чисел. На данный момент мы не можем утверждать или отрицать истинность этого результата».[3]

Основная идея, использованная индийскими математиками – древняя китайская теорема об остатках. Безусловно, это выдающееся достижение. Результат замечателен как сам по себе, так и той простой и изящной идеей, которая положена в его основу. «На данный момент мы не можем утверждать или отрицать истинность этого результата».[4]

Другой результат в теории простых чисел - можно сказать информационный «водопад» по поводу исследований английского и турецкого (в тандеме) математиков. Здесь лучше привести полный текст одной из опубликованных заметок по этому поводу в апреле 2003г. на сайте http://news.bbc.co.uk/hi/russian/sci/tech/newsid_2918000/2918459.stm .

«Двое математиков утверждают, что сделали шаг вперед к пониманию простых чисел и к доказательству гипотезы Римана, одной из самых увлекательных загадок математики. Ден Голдстон из университета штата Сан-Хосе и Чем Ялдирим из университета Богазичи в Стамбуле доложили о результатах своей работы на конференции, посвященной теориям алгоритмов, в Германии. Некоторые ученые считают, что работа Голдстона и Ялдирима является одной из самых ярких в области математики за последние несколько десятилетий. Гипотеза Римана о распределении ряда простых чисел была сформулирована в 1859 году. Простое число - целое положительное число, большее единицы, делящееся только на единицу и само себя (например - 2, 3, 5, 7, 11, 13 и так далее). Среди простых чисел встречаются так называемые "близнецы" или пары простых чисел, разница между которыми составляет двойку (например, 11 и 13).

"Близнецы" появляются с некой периодичностью, причем, чем больше числа, тем реже они встречаются (11 и 13; 17 и 19; 29 и 31; 41 и 43; 59 и 61). То же происходит и с обычными простыми числами. В числах, близких к триллиону, лишь каждое 28 число является простым. Еще Евклидом было доказано, что простых чисел бесконечно много. Однако окончательного ответа на вопрос, конечно или бесконечно множество "близнецов", пока не существует.

Распределение простых чисел среди всех натуральных чисел не подчиняется никакой закономерности, однако немецкий математик Бернгард Риман (1826 - 1866), введя понятие так называемой дзета-функции, утверждал, что ряд этих "близнецов" бесконечен. Голдстон подошел к решению задачи немного с другой стороны, попытавшись сначала ответить на вопрос - возможно ли найти пару простых чисел, которые не были бы "близнецами", но располагались ближе друг к другу, чем обычные простые числа. После многих лет совместной работы ученые смогли доказать, что такие числа существуют. Математики считают, что работа ученых имеет огромное значение для решения задачи определения периодичности возникновения простых чисел и чисел "близнецов". Доказательство гипотезы Римана может иметь практическое применение гораздо шире, чем кажется на

---

[3] http://www.cryptography.ru

[4] Там же.

первый взгляд. Простые и так называемые "полупростые" числа (которые делятся только на два других простых числа) - лежат в основе системы криптографии, известной как RSA. Поэтому если гипотеза будет доказана, то это приведет к революционному прорыву в области криптографии. Простые числа занимали древних математиков еще 2 тысячи лет назад. Эратосфен первый построил алгоритм нахождения простых чисел - так называемое "решето Эратосфена". В 2000 году математический институт Клея назначил премию в миллион долларов тому, кто докажет теорему Римана или опровергнет ее. Голдстон надеется, что он со своим коллегой продвигаются в правильном направлении»[5].

Также заслуживает внимания заметка «Фундаментальное открытие в теории простых чисел», опубликованная на сайте[6] по материалам журнала Nature. Приведем небольшую выдержку из этой заметки:

«И вот математики Дэн Голдстон (Dan Goldston) из университета Сан-Хосе (Калифорния) и Кем Ялдирим (Cem Yildirim) из университета Богазичи в Стамбуле (Турция) доказали, что простые числа вне зависимости от их величины могут появляться в ряду простых чисел ближе, чем среднее расстояние между ними. Сообщение об этом было сделано на конференции в Американском математическом институте в г. Пало-Альто, Калифорния.

"Это вызвало бурю восторгов", - заявил специалист в области простых чисел Роберт Воган (Robert Vaughan) из университета штата Пенсильвания. Долгое время математикам не удавалось обнаружить какой-либо систематичности в распределении простых чисел - несмотря на усилия таких светил, как Пьер Ферма, Бернард Риман, Джордж Харди и Пол Эрдос. Новое видение простых чисел не противоречит представлению о том, что их появление носит, в общем-то, случайный характер, однако теперь среди общего беспорядка удалось нащупать скопления этих чисел.
Долгое время считалось, что чем больше простые числа, тем больше расстояние между ними. Показано, что в окрестностях целого числа x среднее расстояние между последовательными простыми числами пропорционально логарифму x. Новое открытие доказало, что, несмотря на это, в отдельных случаях расстояние между такими числами может быть значительно меньше. Математикам давно известны так называемые парные простые (простые числа-близнецы, отличающиеся на 2): 11 и 13, 29 и 31, 59 и 61. Иногда они образуют целые скопления, например 101, 103, 107, 109 и 113. У математиков давно существовало подозрение, что такие скопления существуют и в области очень больших простых чисел, однако доказать это неудавалось.
Ялдирим и Голдстон доказали, что расстояние между простыми числами может быть существенно меньше, чем среднее значение log x, вне зависимости от величины x. При этом соседствовать друг с другом могут как два числа, так и целые их скопления.
Особенно восхитило математическое сообщество не столько само доказательство,

---

[5] http://news.bbc.co.uk/hi/russian/sci/tech/newsid_2918000/2918459.stm

[6] http://www.chtonovogo.ru/newsarticle.php?id=354

сколько метод, которым оно было получено. "Метод оказался существенно отличен от всего, что делалось прежде", - пояснил г-н Вохан. По его мнению, аналогичный подход может пролить свет также и на распределение аномально больших "зазоров" между простыми числами».

После небольшого обзора существующих проблем и подходов к их решению в теории простых чисел вернемся к задаче распределения чисел близнецов в натуральном ряде чисел. До сих пор неизвестно конечно или бесконечно множество таких близнецов. Эта проблема напрямую связана с другой, более сложной проблемой распределения простых чисел в натуральном ряде. Вопросы распределения простых чисел изучаются и элементарными методами, и методами математического анализа [2]. Поэтому, чтобы двигаться дальше, нам необходимо остановиться на вопросе распределения простых чисел в натуральном ряде.

I. Распределение простых чисел в натуральном ряде чисел.

Сразу оговоримся, что данный вопрос подробно рассмотрен в литературе [2, 3]. Предложенный метод анализа натурального ряда чисел доложен на V Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, проводимой в г. Тула 19 -25 мая 2003г.[7]

Вкратце, в «Приложении 1», представлены основные идеи метода, позволяющего понять структуру распределения простых чисел.

Представленный в «Приложении 1» материал свидетельствует о закономерном распределении простых чисел в натуральном ряде. Само распределение простых чисел является следствием действия Закона обратной связи чисел и подчиняется детерминированному алгоритму формирования составных чисел. Еще недавно (1985г.) можно было прочитать в увлекательной книге «Живые числа, 5 экскурсий» откровенные высказывания математика Дона Цагира о простых числах: «…простые числа, при своём таком простом определении и при своей роли кирпичиков, из которых строятся все натуральные числа[8], являются самыми капризными и упрямыми из всех объектов, вообще изучаемых математиками. Они растут среди натуральных чисел как сорная трава, не подчиняясь, кажется, ничему, кроме случая, и никто не может предсказать, где взойдет ещё одно простое, а, увидев число, – определить, простое оно или нет. Другой факт озадачивает ещё больше, так как он состоит в прямо противоположном утверждении, а именно: простые числа демонстрируют удивительную регулярность, они подчиняются законам, и притом с почти педантичной точностью»[9][5].

«Непосвящённому может показаться, что свойство числа быть простым слишком случайно и исключает возможность доказательства каких-либо фактов о таких числах. Этот взгляд был опровергнут уже 2200 лет тому назад Евклидом, доказавшим существование бесконечного множества простых чисел. Его

---

[7] **А.В. Баяндин**. Закон обратной связи чисел: простые числа и разложение составных чисел на множители. Тезисы докладов V Международной конференции по алгебре и теории чисел. Тула, 2003. с. 31-32.
А.В. Баяндин. Матричный метод анализа натурального ряда чисел. Тезисы докладов V Международной конференции по алгебре и теории чисел. Тула, 2003. с. 32-33.

[8] *A.M. Legendre*, Essai sur la theories des Nombers, Paris, 1808, стр. 394

[9] http://ega-math.narod.ru/Liv/Zagier.htm

рассуждение укладывается в одну фразу: *если бы имелось лишь конечное число простых, то можно было бы их перемножить и, прибавив единицу, получить число, которое не делится ни на одно простое, что невозможно*. В XVIII веке Эйлер доказал более сильное утверждение, а именно что ряд, составленный из величин, обратных простым, расходится, т.е. его частичные суммы становятся с ростом количества слагаемых больше любого заданного числа».[10]

Сейчас нам интересно знать, как «работает» обратная связь в числах, почему появляются и не исчезают простые числа на бесконечности? Что «питает» и не дает «умереть» простым числам на бесконечности?

Ответы на данные вопросы можно получить, если внимательно рассмотреть формирование составных чисел в джойнт ряде. Во-первых, простые и составные из простых сомножителей ≥7 числа объединены Законом обратной связи чисел в единый джойнт ряд (Таблица 2П). Во-вторых, эти числа располагаются в 24-ех ячейках периодической матрицы (Таблица 1П), причем как простые, так и составные числа имеют одинаковые скрининговые параметры (признак деления на 9 и - на10).

Таким образом, имея ограниченный ареал размещения (матрица или джойнт ряд) простые и составные числа «соперничают» между собой по местам их расположения. В матрице (Таблица 2П) красным цветом изображены составные числа. Так, если в первой матрице всего 2 составных числа (49 и 77) и 22 простых числа, то, например, в двенадцатой матрице содержится 14 составных чисел (1073, 1133, 1081, 1111, 1121, 1141, 1099,1139, 1159, 1169, 1127, 1147, 1157, 1177) всего 10 – простых. Как видим, матрица буквально «краснеет на глазах». Тоже происходит и с размещением простых и составных чисел в джойнт ряде: с увеличением номера периода повторения ***n*** «разреженность» простых чисел возрастает (см. Таблицу 4П). Эта «разреженность» объясняется формированием составных чисел, занимающих места в матрице и в джойнт ряде. Так, между простыми числами 113 и 127 находятся два составных числа 119 и 121; между простыми числами 6427 и 6449 - составные числа 6431, 6433, 6437, 6439, 6443 (см. Таблицу 4П). Кстати, данный факт явился основой аппроксимации распределения простых чисел логарифмической кривой в аналитической теории чисел и – основой для аналитического исследования. «Но где закономерность, там и учёные, которые пытаются её разгадать. И данный случай не стал исключением. Нетрудно найти эмпирическую формулу, хорошо описывающую рост количества простых чисел. От 1 до 100 имеется 25 простых чисел, т.е. четверть всех чисел; до 1000 их 168, т.е. около одной шестой; до 10 000 их 1229, т.е. примерно одна восьмая. Продолжая вычисления до 100 000, 1 000 000 и т.д. и определяя каждый раз отношение количества простых к количеству всех натуральных чисел, получим данные, приведённые в Таблице 2:

:

[10] Там же.

Таблица 2 .

x	$\pi(x)$	$x/\pi(x)$
10	4	2,5
100	25	4,0
1 000	168	6,0
10 000	1 229	8,1
100 000	9 592	10,4
1 000 000	78 498	12,7
10 000 000	664 579	15,0
100 000 000	5 761 455	17,4
1 000 000 000	50 847 534	19,7
10 000 000 000	455 052 512	22,0

(Так скромно выписанные в ней значения $\pi(x)$ потребовали тысяч часов трудоёмких вычислений.) Видно, что отношение x к $\pi(x)$ при переходе от данной степени десяти к последующей всё время увеличивается примерно на 2,3. Математики сразу узнают в числе 2,3 логарифм 10 (разумеется, по основанию e). В результате возникает предположение, что

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

причем знак ~ означает, что отношение соединённых им выражений с ростом x стремится к 1. Это асимптотическое равенство, впервые доказанное в 1896. г., называется в настоящее время законом распределения простых чисел. Гаусс, величайший из математиков, открыл этот закон в пятнадцатилетнем возрасте, изучая таблицы простых чисел, содержавшиеся в подаренной ему за год до того таблице логарифмов. В течение всей своей жизни Гаусс живо интересовался распределением простых чисел и проводил обширные вычисления для выяснения этого вопроса. В своём письме к Энке [6] Гаусс описывает, как он “очень часто употреблял свободные четверть часа, чтобы то там, то здесь просчитать хилиаду” (т.е. интервал в 1000 чисел), и так до тех пор, пока он не нашёл, наконец, все простые числа, меньшие трёх миллионов (!), и не сравнил полученные результаты с предполагаемой формулой их распределения. … Рассматривая таблицу простых чисел, можно заметить, что иногда встречаются особенно большие интервалы (например, между 113 и 127), совсем не содержащие простых. Пусть g(x) – длина наибольшего из интервалов между 1 и x, не содержащих простых чисел. Например, для x = 200 самым длинным из них является только что упомянутый интервал от 113 до 127, так что g(200) = 14. Величина g(x) растёт, разумеется, очень неравномерно, однако некоторые эвристические соображения приводят к асимптотической формуле

$$g(x) \sim \ln^2 x.$$

Насколько всё-таки хорошо согласуется с ожидаемым поведением даже эта чрезвычайно сильно скачущая функция g(x), видно из рисунка.

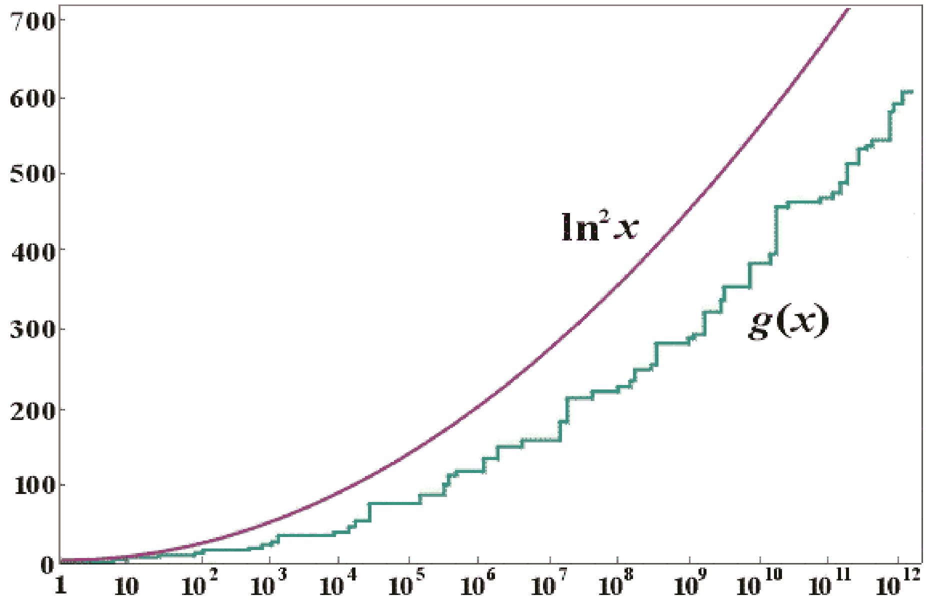

Рис.1. Аппроксимация промежутков между простыми числами».[11]

Мы уже отмечали, что распределение простых чисел полностью определено формированием составных чисел из простых сомножителей ≥ 7. Поэтому, зная, например, количество составных чисел до заданного числа X, можно легко найти количество простых чисел из Закона обратной связи чисел: **π(x) + q(x) =[ηx]** , (1П). Приведу в качестве примера таблицу рассчитанных составных чисел, не превышающих число X = 961:

Таблица 3.

(b + 30*l*) – ось ординат.

31								961	1147	1271	1333	1457	1519	1643	1829	1891	2077		2263	2387				
29							841	899	1073	1189	1247	1363	1421	1537	1711	1769	1943	2059	2117	2233				
23						529	667	713	851	943	989	1081	1127	1219	1357	1403	1541	1633	1679	1771				
19					361	437	551	589	703	779	817	893	931	1007	1121	1159	1273	1349	1387	1463				
17				289	323	391	493	527	629	697	731	799	833	901	1003	1037	1139	1207	1241	1309				
13			169	221	247	299	377	403	481	533	559	611	637	689	767	793	871	923	949	1001				
11		121	143	187	209	253	319	341	407	451	473	517	539	583	649	671	737	781	803	847	869	913	979	
7	49	77	91	119	133	161	203	217	259	287	301	329	343	371	413	427	469	497	511	539	553	581	623	…
	7	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**49**	**53**	**59**	**61**	**67**	**71**	**73**	**77**	**79**	**83**	**89**	**„„**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**„„**

(a + 30*m*) – ось абсцисс.

Красным цветом отмечены составные числа: 49; 121; 143; 481…., меньшие заданного X = 961. Синим цветом – повторные составные числа (подробное

[11] http://ega-math.narod.ru/Liv/Zagier.htm

объяснение см. ниже, в разделе о парных сомножителях больших составных чисел): 539(=7×77=11×49); 637(=7×91=13×49); 833(=7×119=17×49); 931(=7×133=19×49); 847(=7×121=11×77). По оси абсцисс и ординат отложены числа джойнт ряда. Нижняя строчка на оси абсцисс есть натуральный ряд чисел, получаемый из джойнт ряда по формуле:n = [ηx]. Например, x =37, n = [0,26(6)×37] = 9. Зеленым цветом обозначены составные числа, являющиеся граничными для первой матрицы на 64 числа.

Составные числа рассчитаны по формуле: $\mathbf{X_{l,m} = (a + 30\times l) \times (b + 30\times m)}$ по программе “SOSTUP.BAS” на ЭВМ. Приведем рассчитанные значения составных чисел в виде распечаток этой программы для нескольких значений ***l и m:***

Таблица 4.

VALUE *l*, m? 0,0

217	161	133	77	49	203	119	91
187	341	253	407	319	143	209	121
247	221	403	377	169	533	299	481
697	731	493	527	289	323	629	391
817	551	703	437	589	893	779	361
667	851	943	1127	529	713	989	1081
1537	1421	1363	1247	1189	1073	899	841
1147	1271	1333	1457	1519	1643	1829	961

VALUE *l*, m? 0,1

427	371	343	287	259	413	329	301
517	671	583	737	649	473	539	451
637	611	793	767	559	923	689	871
1207	1241	1003	1037	799	833	1139	901
1387	1121	1273	1007	1159	1463	1349	931
1357	1541	1633	1817	1219	1403	1679	1771
2407	2291	2233	2117	2059	1943	1769	1711
2077	2201	2263	2387	2449	2573	2759	1891

VALUE *l*, m? 0,2

637	581	553	497	469	623	539	511
847	1001	913	1067	979	803	869	781
1027	1001	1183	1157	949	1313	1079	1261
1717	1751	1513	1547	1309	1343	1649	1411
1957	1691	1843	1577	1729	2033	1919	1501
2047	2231	2323	2507	1909	2093	2369	2461
3277	3161	3103	2987	2929	2813	2639	2581
3007	3131	3193	3317	3379	3503	3689	2821

VALUE *l*, m? 0,3

847	791	763	707	679	833	749	721
1177	1331	1243	1397	1309	1133	1199	1111
1417	1391	1573	1547	1339	1703	1469	1651
2227	2261	2023	2057	1819	1853	2159	1921
2527	2261	2413	2147	2299	2603	2489	2071
2737	2921	3013	3197	2599	2783	3059	3151
4147	4031	3973	3857	3799	3683	3509	3451
3937	4061	4123	4247	4309	4433	4619	3751

VALUE *l*, m? 0,4

1057	1001	973	917	889	1043	959	931
1507	1661	1573	1727	1639	1463	1529	1441
1807	1781	1963	1937	1729	2093	1859	2041
2737	2771	2533	2567	2329	2363	2669	2431
3097	2831	2983	2717	2869	3173	3059	2641
3427	3611	3703	3887	3289	3473	3749	3841
5017	4901	4843	4727	4669	4553	4379	4321
4867	4991	5053	5177	5239	5363	5549	4681

VALUE *l*, m? 1,1

2257	1961	1813	1517	1369	2183	1739	1591
1927	2501	2173	2747	2419	1763	2009	1681
2107	2021	2623	2537	1849	3053	2279	2881
3337	3431	2773	2867	2209	2303	3149	2491
3577	2891	3283	2597	2989	3773	3479	2401
3127	3551	3763	4187	2809	3233	3869	4081
4897	4661	4543	4307	4189	3953	3599	3481
4087	4331	4453	4697	4819	5063	5429	3721

VALUE *l*, m? 1,2

3367	3071	2923	2627	2479	3293	2849	2701
3157	3731	3403	3977	3649	2993	3239	2911
3397	3311	3913	3827	3139	4343	3569	4171
4747	4841	4183	4277	3619	3713	4559	3901
5047	4361	4753	4067	4459	5243	4949	3871
4717	5141	5353	5777	4399	4823	5459	5671
6667	6431	6313	6077	5959	5723	5369	5251
5917	6161	6283	6527	6649	6893	7259	5551

VALUE *l*, m? 2,2

6097	5561	5293	4757	4489	5963	5159	4891
5467	6461	5893	6887	6319	5183	5609	5041
5767	5621	6643	6497	5329	7373	6059	7081
7777	7931	6853	7007	5929	6083	7469	6391
8137	7031	7663	6557	7189	8453	7979	6241
7387	8051	8383	9047	6889	7553	8549	8881
10057	9701	9523	9167	8989	8633	8099	7921
8827	9191	9373	9737	9919	10283	10829	8281

VALUE *l*, m? 2,3

8107	7571	7303	6767	6499	7973	7169	6901
7597	8591	8023	9017	8449	7313	7739	7171
7957	7811	8833	8687	7519	9563	8249	9271
10087	10241	9163	9317	8239	8393	9779	8701
10507	9401	10033	8927	9559	10823	10349	8611
9877	10541	10873	11537	9379	10043	11039	11371
12727	12371	12193	11837	11659	11303	10769	10591
11557	11921	12103	12467	12649	13013	13559	11011

Цветом в приведенной таблице выделены повторные составные числа до X≤ 961. Представим результаты расчета составных чисел **Таблицы 2** в виде гистограммы значений количества составных чисел по каждому числу джойнт ряда по оси ординат, рис. 1.

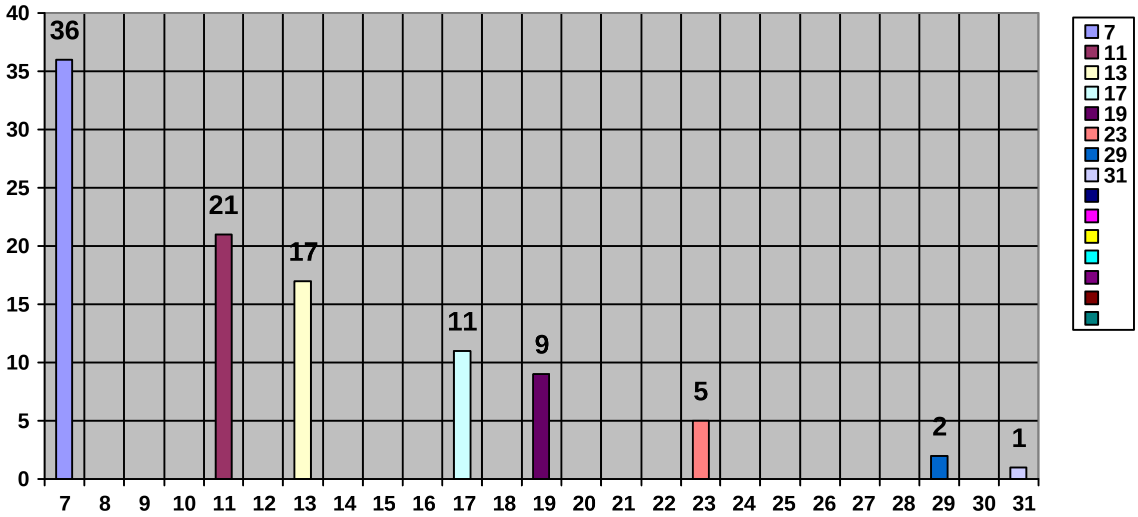

Рис.2. Гистограмма количественного распределения составных чисел по числам джойнт ряда (числа по оси ординат **Таблицы 2**) для $\mathbf{X \le 961}$.

Здесь уместно показать те тонкости и «хитрости» в поведении составных чисел, которые не учитываются или огрубляются при аналитическом подходе к анализу простых чисел. Но, влияние этого поведения составных чисел очень и очень существенно при x $\to \infty$, что является основным фактором отличия результатов аналитических исследований от экспериментальных результатов.

Воспользуемся материалами исследований [3] по выводу аналитической функции для распределения простых чисел в натуральном ряде и оценим возникающие при этом сложности учета изменений составных чисел.

Первое, что «бросается в глаза» при ближайшем рассмотрении **Таблицы 2** и графика на **рис. 1** – это характер изменения количества составных чисел, приходящихся на первый из сомножителей $\mathbf{(a + 30\times \mathit{l})}$ выражения для составного числа:

$$\mathbf{X_{\mathit{l},m} = (a + 30\times \mathit{l}) \times (b + 30\times m)},$$

при ограничении абсолютных значений составных чисел заданным заранее максимальным числом **X**, до которого хотелось бы знать количество простых чисел. То есть, заведомо и всегда мы должны искать составные (простые) числа при условии $\mathbf{X_{\mathit{l},m} \le X}$.

Это ограничение является очень существенным и, в конечном счете, определяет функциональный характер изменения количества составных чисел в массиве чисел до заданного **X.**

Формирование составных чисел происходит по ***точному детерминированному алгоритму*** (4П), что предполагает образование ровно 64 составных чисел на произвольное сочетание индексов l и m в указанной выше формуле составного числа:

(7+30*l*)´{(7 + 30m);(11 + 30m);(13 +30m);…(31 +30m)};
(11+30*l*)´{(11 + 30m);(13 +30m);… (31 +30m);(7 +30(m+1))};
(13+30*l*)´{(13+30m);(17+30m);…(7+30(m+1));(11+30(m+1))};

. . . . . .

(31+30*l*)´{(31+30m);(7+30(m+1));… (29+30(m+1))}, (4П)

где $l \le m$, l, m = 0, 1, 2, 3, 4…
Так, например, для $l = m = 0$, по алгоритму рассчитывается **матрица на 64 числа**:

Таблица 5.

49; 77; 91; 119; 133; 161; 203; 217
121; 143; 187; 209; 253; 319; 341; 407
169; 221; 247; 299; 377; 403; 481; 533
289; 323; 391; 493; 527; 629; 697; 731
361; 437; 551; 589; 703; 779; 817; 893
529; 667; 713; 851; 943; 989; 1081; 1127
841; 899; 1073; 1189; 1247; 1363; 1421; 1537
961; 1147; 1271; 1333; 1457; 1519; 1643; 1829.

Эта матрица по своей конфигурации является зеркально симметричной матрице в **Таблице 2.** Синим цветом обозначены повторные составные числа**.** Красным цветом отмечены составные числа, подпадающие под условие $\mathbf{X_{l,m} \le X \le 961}$, что свидетельствует о частичном использовании составных чисел этой матрицы. Более того, для нахождения всех составных чисел при заданном условии ($\mathbf{X_{l,m} \le X \le 961}$**)**, необходим расчет еще 3,5 матриц с индексами ***l и m :*** (0,1); (0,2); (0,3); и половину – (0,4) соответственно. Сказанное как раз и демонстрируется в **Таблице 2.** Таким образом, выполнение условия $\mathbf{X_{l,m} \le X \le 961}$ при нахождении составных чисел требует выяснения закономерности изменения количества составных чисел, приходящихся на один из сомножителей составного числа. Или другими словами, необходимо определить количество составных чисел, образуемых коммутацией чисел джойнт ряда, на каждое число джойнт ряда от **7** до $J_i \le [\sqrt{X}\,]$.
Где J_i – число джойнт ряда, ближайшее к целому значению $[\sqrt{X}\,]$.

Обратимся теперь к гистограмме (Рис.1), отображающей количество составных чисел, образуемых первыми числами джойнт ряда от 7 до $J_i = [\sqrt{X}\,] = \sqrt{961} = 31$, в соответствии с **Таблицей 2.** Нетрудно заметить, что характер изменения значений гистограммы находится в обратно пропорциональной зависимости от аргумента – значений джойнт ряда. Как известно, функция у = $\frac{k}{x}$ является равнобокой гиперболой, интеграл от которой есть натуральный логарифм:

$$\int \frac{k}{x} dx = k \ln|x| + C \qquad (1).$$

С другой стороны, используя значения **Таблицы 2**, найдем количество составных чисел, по абсолютной величине не превосходящих заданного **X** $\le$ **961.** Для этого вместо интеграла (1) воспользуемся суммой отношений $\frac{k}{x}$, где k есть максимальное составное число $J_{i,max} \le X \le 961$ для первых чисел джойнт ряда от 7 до $J_i \le [\sqrt{X}]$.Используем общее выражение (41) для составных чисел [3, с.32]:

$$q(x) = q_c(x) - (q_{cn}(x) - q_{ncn}(x)) \quad (2)$$

где: $q_c(x)$*-составные из простых сомножителей числа;*

$q_{cn.}(x)$*-составные повторные числа;*

$q_{ncn.}(x)$*- числа, исключаемые из составных повторных чисел, являющиеся коммутацией составных чисел джойнт ряда и уже учтенные в составных повторных числах.*

NOTA BENE![12]

Отметим сразу, что построение формулы (2) имеет чисто ***методологический*** характер и определяется свойствами алгоритмической матрицы составных чисел на 64 числа, сформированные составные числа которой размещены не в джойнт ряде, а - в виде таблицы умножения на плоскости в Декартовой системе координат. При этом, по осям абсцисс и ординат отложены одинаковые значения чисел джойнт ряда, а на самой плоскости представлены составные числа – как результат умножения чисел этих джойнт рядов. ***Реально, т.е. в натуральном ряде, ни*** $q_{cn.}(x)$ ***ни*** $q_{ncn.}(x)$ ***конечно нет.*** Эти составные числа в натуральном ряде просто состоят из большего числа простых сомножителей, чем другие, а в джойнт ряде – представлены бóльшим числом парных сомножителей выражения $X_{l,m} = (a + 30\times l) \times(b + 30\times m)$ и занимают, каждое из этих составных чисел, одно и тоже место в джойнт ряде.

Последнее утверждение целесообразно продемонстрировать на конкретных примерах. Возьмем несколько чисел, являющихся «повторными составными числами»: **539=49×11; 833=17×49;1001=77×13; 1771=23×77; 3773=49×77; 448987=49×77×119,** и разложим их на парные сомножители по алгоритму и программе **RASMLX.BAS** [4, с.79], в соответствии с формулой

$X_{l,m} = (a + 30\times l) \times(b + 30\times m)$:

Таблица 6.

VALUE N29**? n = 17, X=539** **m *l* *a* *b*** 2 0 7 17→ 7×77 1 0 11 19→11×49	VALUE N23? **n=27, X=833** **m *l* *a* *b*** 3 0 7 29→ 7×119 1 0 17 19→17× 49	VALUE N11**? n=33, X=1001** **m *l* *a* *b*** 4 0 7 23→ 7×143 2 0 11 31→11× 91 2 0 13 17→13× 77
VALUE N31**?n= 58, X=1771** **m *l* *a* *b*** 8 0 7 13→ 7×253 5 0 11 11→11×161 1 0 23 47→23× 77	VALUE N23? **n=125, X=3773** **m *l* *a* *b*** 17 0 7 29→ 7×539 11 0 11 13→11×343 1 1 19 47→19× 77	VALUE N7? **n=14966, X=448987** **m *l* *a* *b*** 2137 0 7 31→ 7× 64141 79 6 7 31→187× 2401 1360 0 11 17→ 11×40817 43 11 13 19→343× 1309 879 0 17 41→ 17× 26411 193 2 17 41→ 77× 5831 304 1 19 43→ 49× 9163 124 3 29 53→119× 3773 26 17 29 53→539× 833

[12] заметь хорошо - латинский

Из приведенной таблицы видно, что количество парных сомножителей у «повторных составных чисел» возрастает с ростом значения самого числа. Для сравнения приведем рассчитанные данные по шести обычным составным числам того же периода ***n*.**

Таблица 7.

VALUE N23**? n = 17, X=533** **m *l a b*** 0 0 13 41 ⟶ 13×41	VALUE N31**? n = 27, X=841** **m *l a b*** 0 0 29 29 ⟶ 29×29	VALUE N17**? n = 33, X=1007** **m *l a b*** 1 0 19 23 ⟶ 19×53
VALUE N17**? n = 58, X=1757** **m *l a b*** 8 0 7 11 ⟶ 7×251	VALUE N31? **n = 125, X=3781** **m *l a b*** 6 0 19 19 ⟶ 19×197	VALUE N29? **n = 14966, X=449009** **m *l a b*** 1360 0 11 19 ⟶ 11×40819

Более того, наблюдается некоторая закономерность: в периодах повторения чисел джойнт ряда ***n***, где есть хотя бы одно число с большим количеством парных сомножителей - встречается много простых чисел. Представим результаты расчета по периодам повторения для чисел из Таблицы 5 и 6 в **Таблице 7**:

Таблица 8.

VALUE N7? n=17 1 0 11 17	VALUE N11? n=17; **PRIME**	VALUE N13? n=17; **PRIME**	VALUE N17? n=17 0 0 17 31	VALUE N19? n=17 0 0 23 23	VALUE N23? n=17 0 0 13 41	VALUE N29? n=17 2 0 7 17 1 0 11 19	VALUE N31? n=17; **PRIME**
VALUE N7? n=27 0 0 19 43	VALUE N11? n=27; **PRIME**	VALUE N13? n=27; **PRIME**	VALUE N17? n=27; **PRIME**	VALUE N19? n=27; **PRIME**	VALUE N23? n=27 3 0 7 29 1 0 17 19	VALUE N29? n=27; **PRIME**	VALUE N31? n=27 0 0 29 29
VALUE N7? n= 33; **PRIME**	VALUE N11? n=33 4 0 7 23 2 0 11 31 2 0 13 17	VALUE N13? n=33 1 0 17 29	VALUE N17? n=33 1 0 19 23	VALUE N19? n=33; **PRIME**	VALUE N23? n=33; **PRIME**	VALUE N29? n=33; **PRIME**	VALUE N31? n=33; **PRIME**
VALUE N7? n=58; **PRIME**	VALUE N11? n=58 2 0 17 43	VALUE N13? n=58; **PRIME**	VALUE N17? n=58 8 0 7 11	VALUE N19? n=58; **PRIME**	VALUE N23? n=58 1 1 11 13	VALUE N29? n=58 1 0 29 31	VALUE N31? n=58 8 0 7 13 5 0 11 11 1 0 23 47
VALUE N7? n=125 9 0 13 19 6 0 17 41	VALUE N11? n=125; **PRIME**	VALUE N13? n=125 1 1 23 41	VALUE N17? n=125; **PRIME**	VALUE N19? n=125; **PRIME**	VALUE N23? n=125 17 0 7 29 11 0 11 13 1 1 19 47	VALUE N29? n=125; **PRIME**	VALUE N31? n=125 6 0 19 19
VALUE N7? n=14966 2137 0 7 31 79 6 7 31 1360 0 11 17 43 11 13 19 879 0 17 41 193 2 17 41 304 1 19 43 124 3 29 53 26 17 29 53	VALUE N11? n=14966 364 1 11 31 63 7 23 37 317 1 17 43	VALUE N13? n=14966; **PRIME**	VALUE N17? n=14966; **PRIME**	VALUE N19? n=14966; **PRIME**	VALUE N23? n=14966; **PRIME**	VALUE N29? n=14966 1360 0 11 19	VALUE N31? n=14966; **PRIME**

Для сравнения приведем таблицу с результатами расчетов факторизации составных чисел **соседних** периодов, т.е. вместо периодов ***n*** = 17; 27; 33; 58; 125 и 14966 возьмем периоды 18; 26; 34; 57; 126 и 14965.

Таблица 9.

VALUE N7? n=18 **PRIME**	VALUE N11? n=18 0 0 19 29	VALUE N13? n=18 2 0 7 19	VALUE N17? n=18 **PRIME**	VALUE N19? n=18 1 0 13 13	VALUE N23? n=18 **PRIME**	VALUE N29? n=18 **PRIME**	VALUE N31? n=18 **PRIME**
VALUE N7? n=26 **PRIME**	VALUE N11? n=26 3 0 7 23	VALUE N13? n=26 1 0 13 31	VALUE N17? n=26 **PRIME**	VALUE N19? n=26 1 0 17 17	VALUE N23? n=26 2 0 11 13	VALUE N29? n=26 **PRIME**	VALUE N31? n=26 **PRIME**
VALUE N7? n= 34 2 0 13 19	VALUE N11? n=34 **PRIME**	VALUE N13? n=34 **PRIME**	VALUE N17? n=34 1 0 17 31	VALUE N19? n=34 **PRIME**	VALUE N23? n=34 4 0 7 29	VALUE N29? n=34 **PRIME**	VALUE N31? n=34 **PRIME**
VALUE N7? n=57 2 0 17 41	VALUE N11? n=57 **PRIME**	VALUE N13? n=57 **PRIME**	VALUE N17? n=57 4 0 11 37	VALUE N19? n=57 8 0 7 7 4 0 13 13 2 0 19 31	VALUE N23? n=57 **PRIME**	VALUE N29? n=57 1 1 7 17	VALUE N31? n=57 **PRIME**
VALUE N7? n=126 17 0 7 31	VALUE N11? n=126 6 0 17 43	VALUE N13? n=126 **PRIME**	VALUE N17? n=126 **PRIME**	VALUE N19? n=126 3 0 29 41	VALUE N23? n=126 **PRIME**	VALUE N29? n=126 9 0 13 23	VALUE N31? n=126 3 1 7 13
VALUE N7? n=14965 188 2 19 43	VALUE N11? n=14965 54 8 29 49	VALUE N13? n=14965 347 1 13 31 281 1 23 41 75 6 17 29	VALUE N17? n=14965 223 2 7 11	VALUE N19? n=14965 **PRIME**	VALUE N23? n=14965 2137 0 7 29 68 7 7 29 481 0 31 53	VALUE N29? n=14965 57 8 17 37	VALUE N31? n=14965 1150 0 13 37

Явное подтверждение указанного выше предположения о возрастании количества простых чисел в периоде, где есть хотя бы одно число с большим количеством парных сомножителей, имеется только для большого числа с девятью парными сомножителями. Для других чисел, имеющих 2 – 3 парных сомножителя, такая закономерность не подтверждается. Т.е., однозначного ответа на данный вопрос дать нельзя, требуются дополнительные исследования.

Учитывая, что для **X≤ 3773,** а значит и для **X ≤ 961** $q_{ncn}(x) = 0$, запишем:

$$q(x) = q_c(x) - q_{cn}(x) =$$

$$[h\left(\frac{959}{7}+\frac{913}{11}+\frac{949}{13}+\frac{901}{17}+\frac{931}{19}+\frac{943}{23}+\frac{899}{29}+\frac{961}{31}\right)] - \frac{n(n-1)}{2} - [h(\frac{931}{49}+\frac{847}{77}) - h11] \tag{3}$$

Прежде, чем сделать вычисления, поясним методику построения данного выражения для составных чисел. По **Таблице 2** определяем, что по первому числу джойнт ряда, числу **7, максимальное** составное число $J_{i,max}$ **≤X ≤ 961** равно $J_{7,max}$ = 959=7×137; по второму числу **11 -** $J_{11,max}$ = 913 = 11×83; по третьему числу **13** – $J_{13,max}$ = 949 = 13×73 и т.д. до числа **31** – $J_{31,max}$ = 961 = 31×31. Соответственно, отношения: $\frac{959}{7}=137; \frac{913}{11}=83$ и т.д., определяют значение второго (большего по величине) сомножителя составного числа.

Счетность чисел джойнт ряда [3, с.33], получается путем умножения структурной постоянной на числа джойнт ряда с отбрасыванием мантиссы (округлением до целого числа) – n = $[\eta x]$. В **Таблице 2** по оси абсцисс отложены вычисленные таким образом натуральные числа, соответствующие порядковому номеру чисел джойнт ряда. Легко заметить, что горизонтальная строка составных чисел для каждого из первых чисел 7, 11,13… джойнт ряда (ось ординат) сдвигается последовательно на единицу. Учет этих «сдвигов» строк составных чисел в виде суммы соответствующих натуральных чисел приводит к формуле $\frac{z(z-1)}{2}$. Здесь: $z = \eta\sqrt{X} = h\sqrt{J_{31,\max}}$. Аналогично объясняется составление выражения для составных повторных чисел.

Запишем выражение (3) в символьной форме:

$$q(x) = q_c(x) - q_{cn}(x) =$$

$$\left\{[h(\frac{J_{7,\max}}{J_{1(7)}}+\frac{J_{11,\max}}{J_{2(11)}}+\frac{J_{13,\max}}{J_{3(13)}}+\frac{J_{17,\max}}{J_{4(17)}}+\frac{J_{19,\max}}{J_{5(19)}}+\frac{J_{23,\max}}{J_{6(23)}}+\frac{J_{29,\max}}{J_{7(29)}}+\frac{J_{31,\max}}{J_{8(31)}})]-\frac{z(z-1)}{2}\right\}- \\ -[h(\frac{J_{49,\max}}{J_{13(49)}}+\frac{J_{77,\max}}{J_{20(77)}})-h11] \qquad (4)$$

Перепишем (4) для общего случая:

$$q(x) = q_c(x) - q_{cn}(x) =$$

$$=[h(\frac{J_{1,\max}}{J_1}+\frac{J_{2,\max}}{J_2}+...+\frac{J_{i,\max}}{J_i}+...+\frac{J_{n,\max}}{J_n})]-\frac{z(z-1)}{2}-$$

$$-[\frac{h}{J_1}(\frac{J_{1;1,\max}}{J_1}+\frac{J_{1;2,\max}}{J_2}+...+\frac{J_{1;i,\max}}{J_i}+...+\frac{J_{1;k_1,\max}}{J_{k_1}})]+1\times k_1+[h\frac{J_{1;1,\max}}{J_1J_1}]-$$

$$-[\frac{h}{J_2}(\frac{J_{1;2,\max}}{J_1}+\frac{J_{2;2,\max}}{J_2}+\frac{J_{2;3,\max}}{J_3}+...+\frac{J_{2;k_2,\max}}{J_{k_2}})]+2\times k_2+[h\frac{J_{1;2,\max}}{J_1J_2}]-...$$

$$-[\frac{h}{J_n}(\frac{J_{1;n,\max}}{J_1}+\frac{J_{2;n,\max}}{J_2}+...+\frac{J_{i;n,\max}}{J_i}+...+\frac{J_{n;n,\max}}{J_n}+\frac{J_{n;(n+1),\max}}{J_{n+1}}+...+\frac{J_{n;k_n,\max}}{J_{k_n}})]+n\times k_n+$$

$$+[\frac{h}{J_n}(\frac{J_{1;n,\max}}{J_1}+\frac{J_{2;n,\max}}{J_2}+...+\frac{J_{i;n,\max}}{J_i})] \qquad (5)$$

где, $z = h\sqrt{J_{n,\max}}$, $k_1 = [hJ_{k_1}]$; $k_2 = 2\times[h(J_{k_2-1})] = 2\times([h(J_{k_2})]-1)$;
$k_n = n\times[h(J_{k_n-(n-1)})] = n\times([hJ_{k_n}]-(n-1)) = n\times[hJ_{k_n}]-n(n-1)$ и n = 1, 2, 3…

Для чисел $X \geq$ **3773** в сумму составных чисел необходимо включать повторные составные повторные числа, которые избыточно исключаются составными повторными числами. То есть, эти числа являются коммутациями составных чисел джойнт ряда. Приведем выражение для повторных составных повторных чисел в общем виде, для произвольного заданного $\boldsymbol{X}$:

$$q_{cn}(x) =$$

$$= [\frac{h\,x}{J_{1s}J_1}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_n})]+$$

$$+[\frac{h}{J_{1s}J_2}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_{k_1}})]+$$

$$+[\frac{h}{J_{1s}J_3}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\frac{1}{J_3}+\ldots+\frac{1}{J_{k_2}})]+\ldots$$

$$-[\frac{h\,x}{J_{1s}J_1}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{1s}J_2}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{1s}J_3}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+)]-\ldots+$$

$$+[\frac{h\,x}{J_{2s}J_1}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_n})]+$$

$$+[\frac{h\,x}{J_{2s}J_2}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_n})]-$$

$$-[\frac{h\,x}{J_{2s}J_1}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{2s}J_2}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{2s}J_3}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+)]-\ldots+$$

$$+[\frac{h\,x}{J_{ns}J_1}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_n})]+\ldots$$

$$+[\frac{h\,x}{J_{ns}J_2}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+\ldots+\frac{1}{J_i}+\ldots+\frac{1}{J_n})]+\ldots$$

$$-[\frac{h\,x}{J_{ns}J_1}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{ns}J_2}\frac{1}{J_1}]-[\frac{h\,x}{J_{ns}J_3}(\frac{1}{J_1}+\frac{1}{J_2}+)]-\ldots$$

(6)

где, J_{1s}; J_{2s}; J_{3s}… - первые составные числа 49; 77; 91; 119; 121…
Вычислим для (4) численное значение количества составных чисел для **X ≤ 961** и n = $h\sqrt{961} = 8$**:**

$q(x) = q_c(x) - q_{cn}(x) = [\eta(137 + 83 + 73 + 53 + 49 + 41 + 31 + 31)] – 8 – [\eta(19 + 11) – 2]$ =
=36 + 22 + 19 + 14 + 13 + 10 + 8 + 8 -28 -5 = **97.**

Конечно, эта цифра точно соответствует количеству составных чисел в натуральном ряде до **X ≤ 961.** В этом легко убедиться, глянув на **Таблицу 5** настоящей работы. Количество простых чисел найдем, воспользовавшись Законом обратной связи чисел
π(x) + q(x) =[ηx] и, выразив из него **π(x),** получим:

π(x) = [ηx] - q(x) = [0,26(6)×961] – 97 = 256 – 97 = 159.

Кстати, эта цифра – абсолютно точная. В этом сразу убеждаешься, сравнивая полученный результат с рассчитанными по алгоритму простыми числами, представленными в **Таблице 4П** настоящей работы. Правда, в полученном результате отсутствуют числа **2, 3** и **5** ввиду их несоответствия свойствам чисел джойнт ряда.

Далее, попытаемся из точного, по крайней мере, для чисел **X≤ 3773,** выражения (4) вывести аналитическую формулу и оценить ошибку приближения.

Во-первых, в выражении (4) положим все максимальные составные числа $J_{i,max}$ = **X ≤ 961.**

Во-вторых, используем материалы монографии [3] по аппроксимации квазигармонического ряда. Квазигармонический ряд представляет собой ряд обратных величин чисел джойнт ряда. Сумма членов квазигармонического ряда находится по формуле (см. формулу (40) [3, с.32]):

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{J_i} = h\{\ln(n+1) + C - G\} = h\{\ln(n+1) + g \qquad (7),$$

где $\gamma = C - G$ = - 0,2061907…- постоянная, выполняющая ту же функцию, что и постоянная Эйлера, только для квазигармонического ряда; C = 0,577215… - постоянная Эйлера; G = 0,7834057… - постоянная, характеризующая отличие гармонического ряда от нормированного структурной постоянной h = 0, 266(6) квазигармонического ряда:

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{J_i} + G \qquad (8).$$

Постоянная G рассчитывается по точной формуле:

$$G=\sum_{1}^{k}\frac{a}{(8k-7)(8k-7+a)}+\sum_{1}^{k}\frac{b}{(8k-6)(8k-6+b)}+\sum_{1}^{k}\frac{c}{(8k-5)(8k-5+c)}+\sum_{1}^{k}\frac{d}{(8k-4)(8k-4+d)}+$$

$$+\sum_{1}^{k}\frac{e}{(8k-3)(8k-3+e)}+\sum_{1}^{k}\frac{f}{(8k-2)(8k-2+f)}+\sum_{1}^{k}\frac{g}{(8k-1)(8k-1+g)}+\sum_{1}^{k}\frac{h}{8k(8k+h)}$$

(9)

где: $a = 3{,}25h$, $b = 3{,}5h$, $c = 1{,}75h$, $d = 2h$, $e = 0{,}25h$, $f = 0{,}5h$, $g = 2{,}75h$, $h = h$.
$n = k \times 8$, $k = 1,2,3,\ldots$

Примечание: В **Приложении 2** представлен вывод функции для анализа джойнт-ряда, аналогичной дзета-функции Римана для натурального ряда чисел.

Таким образом, учитывая изложенное, представим количество простых чисел при условии **X≤ 3773,** используя модифицированное выражение (4) в виде аналитической формулы:

$$\pi(x) = [\eta x] - q(x) = [\eta x] - [h^2 X(\ln(z+1)+g)] + \frac{z(z-1)}{2} + [\frac{h^2 X}{J_1}(\ln(r+1)+g)] - r$$

(10),

где, $z = [h\sqrt{X}]$, $r = [hJ_2]$.

Произведем вычисления π(x) для X=961. Найдем значения z, r:
$z = [0{,}26(6)\times\sqrt{961}] = 8$, $r = [hJ_2] = [0{,}26(6)\times 11] = 2$, $g = -0{,}20619$. *По этим значениям рассчитаем π(x по формуле (10)):*

$\pi(x) = 256 - [0{,}071(1)\times 961\times 1{,}991] + 28 + [\frac{0{,}071(1)\times 961}{7}\times 0{,}892] - 2 = 256 - 135 + 28 + 9 - 2 = 156.$

Далее, вычислим количество простых чисел по приближенной аналитической формуле Чебышёва:

(11)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

$p_{Cheb}(x) \approx \frac{961}{\ln 961} \approx 139{,}9 \approx 140$, что конечно же учитывает числа 2, 3, 5.

С учетом перечисленных чисел (2, 3 и 5) истинное количество простых чисел до X≤ 961 равно: 159 + 3 = 162. Получается, что формула Чебышёва занижает количество простых чисел при X≤ 961 на 15,7%. Наша приближенная формула (10) занижает количество простых чисел гораздо меньше, на 1,9%, но явно сложнее формулы Чебышёва. Конечно, с учетом алгоритмических формул (5) и (6) для чисел X≥3773 можно рассчитывать точное количество простых чисел для заданного X. Но, такой расчет очень, как мне представляется лучше производить самой ЭВМ. А лучшее – это использование абсолютно точного алгоритма образования составных чисел в джойнт ряде, о чем говорилось выше в данной работе.

Таким образом, мы убедились в невозможности абсолютно точного нахождения количества простых чисел в натуральном ряде на основе аналитических выражений. Причиной этому являются:

- огрубление результатов вычислений заданием фиксированного значения числа X, т.к. для каждой группы составных чисел требуется свое максимальное значение составного числа, заведомо меньшее заданного X ($J_{Sost.max} = X$);
- приближение суммы квазигармонического ряда логарифмом.

NOTA BENE!

Необходимо остановиться еще на одном ***методологическом аспекте*** *теории простых чисел. Исторически простые числа и их распределение в натуральном ряде рассматривалось вне учета каких-либо факторов влияния на их появление и изменение количества. Простые числа сравнивались друг с другом как таковые, либо рассматривалась их абсолютная разность, частота появления в натуральном ряде и пр. При этом, сам математический аппарат допускал интерпретацию указанных сравнений и наблюдений в виде аппроксимации экспериментальных результатов аналитическими формулами. И весь дальнейший анализ сводился к исследованию полученных таким образом аналитических выражений. Таковы, например, асимптотический закон распределения простых чисел, дзета-функция Римана и множество других приближений и аналитических формул, в том числе и приводимых в настоящей работе. Как выяснилось, что задача, сформулированная еще в древности, на заре зарождения математики, имеет чисто алгоритмическое решение: распределение простых чисел в натуральном ряде подчиняется абсолютно точному детерминированному алгоритму и имеет фрактальный характер. Что же не было учтено математиками за эти 2200 лет при поиске истинного распределения простых чисел? Ответ на данный вопрос* *уже звучал на страницах данной работы. Основной момент в нахождении распределения – это учет взаимного влияния простых и составных чисел друг на друга. И так как простые и составные из простых сомножителей ≥ 7 числа имеют один и тот же ареал (область) действия, а это выражается в матрице на 24 числа с периодом Т =90 чисел и джойнт-ряде с восемью порождающими числами и периодом повторения Т=30, а составные числа из простых сомножителей ≥ 7 имеют точный алгоритм построения, то и простые числа однозначным образом зависят от составных (как от мест их расположения, так и количественного состава в матрице или джойнт-ряде).*

Сказанное выше единственным образом отражается в Законе обратной связи чисел и является, по-видимому, основой не только в математике (теории чисел), но и – вообще в естествознании. Казалось бы, обыденное понятие "обратная связь" трансформировалось в настоящее время не только в философский принцип, но и стало одним из ведущих принципов электроники, кибернетики и информатики. Принцип обратной связи настолько всеобъемлющ, что можно говорить о его новом статусе – как методологическом принципе, служащим определенным регулятивом в естественнонаучном знании.

Понятие обратной связи впервые возникло в естествознании в связи с анализом механизма управления как функциональной системы, родившейся в процессе эволюции и лежащей в основе процессов саморегуляции и саморазвития живой природы, общественных систем и их экономики, всей ноосферы, а также процессов познания. Многие авторы философской и экономической литературы, даже спустя 40 лет после становления кибернетики, продолжают игнорировать (или не понимать) значения и определяющей роли обратных связей[13]. Так, Философский словарь (1987, 1991г.г.) трактует управление без привлечения понятий обратной связи, адаптации и самоорганизации.

[13] Р.Ф. Абдеев. Философия информационной цивилизации. М. ; ВЛАДОС, 1994, с.75

При анализе центральной категории диалектики – категории развития явно недостаточно внимания уделяется раскрытию ее связи с понятиями информации, организации, системности и управления. В действительности, развитие не есть просто изменения вообще, присущие всякому движению, а представляют собой изменения, связанные с процессами отражения (как всеобщего свойства материи), сопровождаемые упорядочиванием связей, накоплением информации, возникновением новых структур, их усложнением и детерминацией. Это – процесс самоорганизации, в котором важнейшее значение имеет генезис механизма управления. Основой механизма управления выступает обратная связь объекта управления с так называемым управляющим субъектом. Структура этого механизма едина для различных по характеру и области применения разделов естествознания.

Сейчас становится ясно, что для теории управления и естествознания, вообще, нелинейность должна стать неотъемлемым элементом теории. Примеры других наук, в том числе теории управления, наглядно демонстрируют тот факт, что учет нелинейных явлений многократно обогащает теорию содержательно: нелинейный «мир» несоизмеримо богаче линейного, и именно на этом пути возникают новые явления, принципы и законы. Так, например, теория автоматического управления существенно обогатилась благодаря решению задач об абсолютной устойчивости, исследованию автоколебательных процессов, адаптивного управления. Примеры из других наук, например физики или химии, еще более выразительны.

Конструктивный путь в нелинейный «мир» лежит в направлении систематического использования важнейшего принципа кибернетики – принципа обратной связи. Сегодня становится очевидным, что этот принцип является основой саморегуляции и развития всего живого.

В силу единства механизма управления в природе, обратная связь, как главный атрибут этого механизма выступает в качестве принципа научного исследования. Обобщенная модель управления *содержит в себе элементы симметрии и асимметрии, раскрывающие системоорганизующую роль механизма управления. В асимметричных условиях существенную роль приобретают обратные связи элементов системы. Таким образом, обратная связь в процессах самоорганизации материи, механизма управления «живой и неживой» природе несет на себе нагрузку основополагающего принципа научного познания и отвечает требованиям принадлежности к классу методологических принципов познания.*

В монографии [4] представлены материалы исследования автора в области теории чисел. Новый матричный метод исследования свойств натурального ряда чисел позволил выявить обратную связь простых и составных из простых сомножителей ≥7 чисел. Впервые в основах математического фундамента обнаружена периодическая закономерность изменения свойств чисел, их взаимосвязь между собой посредством обратной связи. Таким образом, принцип обратной связи приобретает всеобъемлющее значение для всего естествознания, обогащая своей методологической значимостью различные по характеру области знаний.

Обратная связь «пронизывает» окружающую нас действительность: она служит ключевым элементом биологической эволюции и естественного отбора; она обеспечивает регуляторный механизм в равновесных системах, в частности в природных экосистемах, и является необходимым элементом работоспособных экономических конструкций; наконец, она составляет основу саморегулирующихся и самоподдерживающихся биосистем. Но до сих пор мы очень мало знаем о механизме обратной связи.

Действительно, идея обратной связи почти очевидна, легко воспринимается и в простых ситуациях ее применение не вызывает проблем. Как правило, механизмы формирования обратной связи ускользают от исследователя, поскольку они довольно сложны. Здесь ситуация аналогична ситуации с другими законами естествознания[14]. В свое время физик Ричард Фейнман сказал о

[14] С.В. Емельянов, С.К. Коровин. Новые типы обратной связи. М.: «НАУКА». Физматлит. 1997, с.319.

законе тяготения: «Закон действует сложно, но его коренная идея проста. Это обстоятельство роднит все наши законы»[15].

Механизм обратной связи чисел, представленный в данной работе, действующий на формирование распределения простых чисел в натуральном ряду чисел, может быть использован в качестве одного из методов синтеза обратных связей в различных направлениях исследования современной науки.

Процессы с обратной связью известны и используются в самой математике уже достаточно давно. Так, описание явлений природы с помощью дифференциальных уравнений, которое ввели около 300 лет назад Исаак Ньютон и Готфрид В. Лейбниц, основано на принципе обратной связи. Динамический закон определяет положение и скорость частицы в данный момент времени через их значения в предыдущий момент. Движение частицы понимается как реализация этого закона. Несущественно, будет ли процесс дискретным, т.е. осуществляемым по шагам, либо непрерывным[16].

В современной компьютерной графике и программировании широко используются процессы с обратной связью, в которых одна и та же операция выполняется снова и снова, когда результат одной итерации является начальным значением для следующей. Это операции с рекурсией и итерацией. Так, итерационный процесс даже с несложной формулой дает интересные результаты, реализующие принцип самоподобия в природе. Бенуа Б. Мандельбротом впервые экспериментально обнаружены и теоретически доказаны основные положения нового направления в науке – фрактальной геометрии.

В более ранних работах автора [8,9] обратная связь находит себе чисто техническое применение (авторское свидетельство 1986 г.) и теоретическое – в обосновании концепции взаимосвязанной структуры метагалактики.

* * *

[15] ***Feynman R.P., Hibbs A.*** Quantum Mechanics and Path Integral/ New York^ Mc Graw-Hill Book Company, 1965.
[16] Х.-О. Пайтген. П.Х. Рихтер.Красота фракталов. Изд. «МИР»,1993, с.21.

Количественно, факт относительного уменьшения содержания простых чисел в натуральном ряде при натуральном $x \to \infty$, виден уже из графика (Рис.1П) для X не превышающего значения 10^9. Но, как бы не много было составных чисел (в матрице или джойнт ряде), простые числа не исчезают на бесконечности. Простые числа являются тем «строительным материалом», из которого производятся все составные числа. Поэтому, кажущееся вырождение простых чисел на бесконечности не приводит к их полному исчезновению. Что удивительно, с составными числами тоже происходит метаморфоза: чем больше становится их абсолютное значение, тем реже они появляются. То есть происходит вырождение составных чисел, приводящее к возрождению простых чисел. Последнее утверждение необходимо обстоятельно разъяснить.

Все составные числа джойнт ряда чисел формируются сочетанием двух чисел джойнт ряда: $\mathbf{X}_{\boldsymbol{l},\mathbf{m}} = \mathbf{(a + 30\times \boldsymbol{l}) \times (b + 30\times m)}$.И если первые составные числа образуются одной парой сомножителей из восьми пар для каждого порождающего числа, то последующие – полным набором из восьми пар сомножителей. Из указанного выше Примечания 1 мы знаем, что по каждому порождающему числу p_i всего восемь сочетаний пар простых чисел джойнт ряда соответствует ему и его окончанию (см. Таблица I – VIII, [4,с.73]). И каждая, из восьми пар сочетаний этих чисел, занимает вполне определенное место в периодах **n** джойнт ряда. Но, при $x \to \infty$ «картина» меняется: почти все составные числа включают в себя все восемь сочетаний простых чисел джойнт ряда, причем – в значительном их количестве. То есть, происходит «вырождение» количества составных чисел: большие составные числа, имея большое количество парных сомножителей, занимают одно и тоже место в джойнт ряде. Иными словами, произвольное фиксированное значение индексов ***l*** и ***m*** в выражении для составного числа должно приводить к образованию 64 составных чисел из пары сомножителей (8 порождающих чисел имеют по 8 пар порождающих сомножителей). Реально мы наблюдаем, что чем больше значение индексов ***l*** и ***m*** , тем меньше (< 64) образуется различных (не равных друг другу) составных чисел. Последнее утверждение продемонстрируем рассчитанными значениями *периодов повторения* ***n*** составных чисел для произвольных фиксированных индексов ***l*** и ***m*** .

Таблицы значений периодов составных чисел $n_s = \frac{X_s}{30}$

Таблица 10.

VALUE *l*,m? 0,0

7	11	13	17	19	23	29	31
7	5	4	2	1	6	3	2
6	11	8	13	10	4	6	3
8	7	13	12	5	17	9	15
23	24	16	17	9	10	20	12
27	18	23	14	19	29	25	11
22	28	31	37	17	23	32	35
51	47	45	41	39	35	29	27
38	42	44	48	50	54	60	31

VALUE *l*,m? 0,1

7	11	13	17	19	23	29	31
14	12	11	9	8	13	10	9
17	22	19	24	21	15	17	14
21	20	26	25	18	30	22	28
40	41	33	34	26	27	37	29
46	37	42	33	38	48	44	30
45	51	54	60	40	46	55	58
80	76	74	70	68	64	58	56
69	73	75	79	81	85	91	62

VALUE *l*,m? 0,2

7	11	13	17	19	23	29	31
21	19	18	16	15	20	17	16
28	33	30	35	32	26	28	25
34	33	39	38	31	43	35	41
57	58	50	51	43	44	54	46
65	56	61	52	57	67	63	49
68	74	77	83	63	69	78	81
109	105	103	99	97	93	87	85
100	104	106	110	112	116	122	93

VALUE *l*,m? 0,3

7	11	13	17	19	23	29	31
28	26	25	23	22	27	24	23
39	44	41	46	43	37	39	36
47	46	52	51	44	56	48	54
74	75	67	68	60	61	71	63
84	75	80	71	76	86	82	68
91	97	100	106	86	92	101	104
138	134	132	128	126	122	116	114
131	135	137	141	143	147	153	124

VALUE *l*,m? 0,4

7	11	13	17	19	23	29	31
35	33	32	30	29	34	31	30
50	55	52	57	54	48	50	47
60	59	65	64	57	69	61	67
91	92	84	85	77	78	88	80
103	94	99	90	95	105	101	87
114	120	123	129	109	115	124	127
167	163	161	157	155	151	145	143
162	166	168	172	174	178	184	155

VALUE *l*,m? 0,5

7	11	13	17	19	23	29	31
42	40	39	37	36	41	38	37
61	66	63	68	65	59	61	58
73	72	78	77	70	82	74	80
108	109	101	102	94	95	105	97
122	113	118	109	114	124	120	106
137	143	146	152	132	138	147	150
196	192	190	186	184	180	174	172
193	197	199	203	205	209	215	186

VALUE *l*,m? 0,6

7	11	13	17	19	23	29	31
49	47	46	44	43	48	45	44
72	77	74	79	76	70	72	69
86	85	91	90	83	95	87	93
125	126	118	119	111	112	122	114
141	132	137	128	133	143	139	125
160	166	169	175	155	161	170	173
225	221	219	215	213	209	203	201
224	228	230	234	236	240	246	217

VALUE *l*,m? 0,7

7	11	13	17	19	23	29	31
56	54	53	51	50	55	52	51
83	88	85	90	87	81	83	80
99	98	104	103	96	108	100	106
142	143	135	136	128	129	139	131
160	151	156	147	152	162	158	144
183	189	192	198	178	184	193	196
254	250	248	244	242	238	232	230
255	259	261	265	267	271	277	248

VALUE *l*,m? 0,8

7	11	13	17	19	23	29	31
63	61	60	58	57	62	59	58
94	99	96	101	98	92	94	91
112	111	117	116	109	121	113	119
159	160	152	153	145	146	156	148
179	170	175	166	171	181	177	163
206	212	215	221	201	207	216	219
283	279	277	273	271	267	261	259
286	290	292	296	298	302	308	279

VALUE *l*,m? 0,9

7	11	13	17	19	23	29	31
70	68	67	65	64	69	66	65
105	110	107	112	109	103	105	102
125	124	130	129	122	134	126	132
176	177	169	170	162	163	173	165
198	189	194	185	190	200	196	182
229	235	238	244	224	230	239	242
312	308	306	302	300	296	290	288
317	321	323	327	329	333	339	310

Красным цветом отмечены периоды повторения составных чисел, образованных двумя и более парами сомножителей из чисел джойнт ряда.

Поясним представленные расчеты периодов повторения примером расчетов составных чисел и их пар сомножителей. Так, если рассмотреть первые 60 периодов составных чисел джойнт ряда по количеству пар сомножителей у каждого составного числа, то мы обнаружим довольно редкое их появление.

Составные числа (Джойнт ряд без простых чисел) Таблица 11.

q(x) = 209

0)	7	11	13	17	19	23	29	31
1)					49			
2)				77				91
3)							119	121
4)			133			143		
5)		161			169			
6)	187					203	209	
7)	217	221						
8)	247		253		259			
9)				287	289		299	301
10)					319	323	329	
11)		341	343					361
12)		371		377				391
13)			403	407		413		
14)	427			437				451
15)					469	473		481
16)			493	497				511
17)	517			527	529	533	539_2	
18)		551	553		559			
19)		581	583		589			
20)		611				623	629	
21)	637_2				649			
22)	667	671			679		689	
23)	697		703	707		713		721
24)		731		737			749	
25)			763	767			779	781
26)		791	793		799	803		
27)	817					833_2		841
28)	847_2	851					869	871
29)					889	893	899	901
30)			913	917		923		931_2
31)			943		949		959	961
32)			973		979		989	
33)		1001_2	1003	1007				
34)	1027			1037		1043		
35)	1057_2			1067		1073	1079	1081
36)					1099			1111
37)		1121		1127_2		1133	1139	1141
38)	1147			1157	1159		1169	
39)	1177		1183_2		1189		1199	
40)	1207	1211			1219			
41)		1241	1243	1247		1253		1261
42)	1267	1271	1273					
43)					1309_3	1313		
44)		1331	1333	1337	1339	1343	1349	1351
45)	1357		1363		1369		1379	
46)	1387	1391	1393	1397		1403		1411
47)	1417	1421_3						1441
48)				1457		1463_3	1469	
49)	1477							1501
50)	1507_2		1513	1517	1519_2		1529	
51)	1537	1541		1547_3				1561

“ порождающие числа”

52) **1573 1577 1589 1591**
53) **1603**
54) **1631 1633 1639 1643 1649 1651**
55) **1661 1673 1679 1681**
56) **1687 1691 1703 1711**
57) **1717 1727 1729_3 1739**
58) **1751 1757 1763 1769 1771_3**
59) **1781 1793 1799**
60) **1807_3 1813_3 1817 1819 1829**

Примечание к таблице:

Нижний символ числа обозначает количество парных сомножителей, например, число **637_2 = 7×91 = 13×49; 847_2 = 7×121 = 11×77; 1547_3 = 7×221 = 13×119 = 17×91; 1771_3 = 7×253 = 11×161 = 23×77.**

Из анализа представленной таблицы следует, что для n = 0 - 60:

- по порождающему числу 7 имеется всего 2 числа, имеющих 2 пары сочетаний чисел джойнт ряда;

- по порождающему числу 11 – всего 1 число, имеющее 2 пары сочетаний;

- по порождающему числу 13 - нет таких чисел;

- по порождающему числу 17 – 1 число с двумя парами сомножителей и 1 число – с тремя парами сомножителей;

- по порождающему числу 19 - 1 число с двумя парами и 2 числа-с тремя парами сомножителей;

- по порождающему числу 23 - 1 число с двумя парами и 1 число с тремя парами сомножителей;

- по порождающему числу 29 - 1 число с двумя парами сомножителей;

- по порождающему числу 31 - 1 число с двумя парами и 1 число с тремя парами сомножителей.

Теперь рассмотрим составные числа с большим периодом повторения, например n = 5000 -5003.

Таблица 12.

n\p$_i$	7	11	13	17	19	23	29	31
5000	**150007_3**	**Prime**	**150013**	**150017_3**	**150019**	**150023**	**150029_3**	**150031**
5001	**150037**	**Prime**	**150043_3**	**150047**	**150049**	**Prime**	**150059_7**	**Prime**
5002	**Prime**	**150071_3**	**150073_3**	**Prime**	**150079**	**Prime**	**Prime**	**Prime**
5003	**Prime**	**150101_3**	**150103**	**Prime**	**150109**	**150113**	**150119**	**150121_3**

Мы видим, что количество парных сочетаний по каждому составному числу возросло и, даже, достигло значения 7 у числа 150059_7 по порождающему числу 29. Посмотрим, из любопытства, что происходит с еще большими числами?

Таблица 13.

n\p$_i$	7	11	13	17	19	23	29	31
5123456	**153703687**	**Prime**	**153703693_3**	**153703697**	**153703699**	**153703703**	**153703709**	**153703711_{17}**
5123457	**Prime**	**Prime**	**153703723**	**Prime**	**Prime**	**153703733_3**	**153703739_5**	**153703741_3**

Итак, число парных сочетаний по составным числам с возрастанием номера периода повторения также возрастает. Так для n = 5123456 по порождающему числу 31 у числа 153703711_{17} имеется 17 парных сочетаний сомножителей. Для периода n = 11111234 по порождающему числу 31 составное число 3333370351_{20} уже имеет 20 парных сочетаний сомножителей. Для большей убедительности приведем распечатки рассчитанных на ЭВМ парных сомножителей составных чисел порядка E+8 по порождающему числу 19, **Таблица 14**.

Таблица 14.

1)VALUE N19? 1.00011e+8 **1.428729E+07 0 7 7** **1031041 3 7 7** **9091908 0 11 29** **172135 19 11 29** **751962 4 13 13** **613564 5 13 13** **10058 331 13 13** **1204951 2 23 23** **429231 7 23 23** **2127893 1 17 17** **5263736 0 19 31** **1265961 2 19 31** **1639523 1 31 49**	**2)VALUE N19? 1.00010e+8** **1.428714E+07 0 7 7** **9091817 0 11 29** **395296 8 13 13** **5117 651 13 13** **4348260 0 23 23** **1204939 2 23 23** **5263683 0 19 31** **4494 741 19 31** **85404 38 31 49** **1825 1824 31 49**	**3)VALUE N19? 1.00009e+8** **1.4287E+07 0 7 7** **41549 80 7 7** **4099 813 7 7** **9091726 0 11 29** **2439243 1 11 29** **2724 1223 11 29** **291571 11 13 13** **39482 84 13 13** **1204927 2 23 23** **72839 45 23 23** **19074 174 23 23** **5882882 0 17 17** **934663 3 17 17** **2040999 1 19 31** **671200 4 29 41** **133522 24 29 41** **16838 197 29 41** **3198 1041 29 41** **42719 77 31 49** **17091 194 31 49**
4)VALUE N19? 1.00007003e+8 **1.428671E+07 0 7 7** **13112 254 7 7** **9091545 0 11 29** **66185 50 11 29** **10671 312 11 29** **7692846 0 13 13** **380254 8 23 23** **22110 150 23 23** **5882764 0 17 17** **2127808 1 17 17** **265270 12 17 17** **2186 1524 17 17** **3304 1008 19 31** **2562 1300 19 31** **3448516 0 29 41** **29249 113 29 41** **61693 53 31 49** **4546 732 31 49**	**5)VALUE N19? 1.00006004e+8** **1.428657E+07 0 7 7** **9091454 0 11 29** **269557 12 11 29** **9939 335 11 29** **7692769 0 13 13** **4348086 0 23 23** **14395 231 17 17** **9674 344 17 17** **133518 24 29 41** **34735 95 29 41** **2245 1483 29 41** **1639441 1 31 49** **17633 188 31 49**	**6)VALUE N19? 1.00005003e+8** **1.428643E+07 0 7 7** **2096 1590 7 7** **9091363 0 11 29** **8346 399 11 29** **970922 3 13 13** **4348043 0 23 23** **4605 723 23 23** **5882647 0 17 17** **729963 4 17 17** **17492 190 17 17** **44664 74 19 31** **42938 77 19 31** **5065 657 29 41** **3857 863 29 41**

В **Таблице 14** приведены рассчитанные значения парных сомножителей для номеров периодов повторения, указанных после слова **VALUE N19?.** Например, для шестого рассчитанного составного числа: **6)VALUE N19? 1.00005003e+8** , период повторения

n = 100005003 и, например, вторая пара сомножителей составного числа найдется следующим образом. Цифры в распечатке результатов работы программы: ***2096 1590 7 7*** означают перечисление индексов m_i l_i a b . Эти индексы входят переменными величинами в формулу для составных чисел джойнт ряда $\mathbf{X}_{l,m} = (\mathbf{a} + 30\times l) \times (\mathbf{b} + 30\times \mathbf{m})$ **.** Число джойнт ряда для периода ***n = 100005003*** равно:

$$\boldsymbol{X_J = 19 + 30n = 19 + 30 \times 100\ 005\ 003 = 3\ 000\ 150\ 109,}$$

и является составным в соответствии с расчетными данными из таблицы:

$$\boldsymbol{X_{l,m} = (7 + 30\times 1\ 590)(7 + 30\times 2\ 096) = 47\ 707\times 62\ 887 = 3\ 000\ 150\ 109,}$$

что в точности соответствует значению вычисленного числа джойнт ряда.

Таким образом, в результате проведенных исследований мы пришли к следующему выводам.

1)Распределение простых чисел в натуральном ряде чисел подчиняется Закону обратной связи чисел.

2)Характер изменения кривой распределения простых чисел всецело зависит и определяется алгоритмом формирования составных чисел джойнт ряда, имеет зеркальную симметрию относительно оси симметрии у = 1/2 на оси ординат (см. рис1П).

3)По Закону обратной связи чисел осуществляется внутреннее регулирование относительного количества простых и составных чисел.

4)Факторами регулирования относительного количества простых и составных чисел являются:

а) «вырождение», исчезновение простых чисел в матрице и, соответственно, в джойнт ряде из-за всё возрастающего количества составных чисел;

б) «вырождение» относительного количества больших составных чисел ввиду установленного возрастания числа парных сомножителей джойнт ряда (другими словами, место в матрице или джойнт ряде, предназначенное для одного простого или одного составного числа занимается большим количеством составных чисел, образованных парами сомножителей джойнт ряда по данному порождающему числу).

На основании изложенного, логично предположить, что характер изменения распределения простых чисел напоминает известные и изученные современным естествознанием процессы регулирования соотношения лисиц и зайцев по Закону обратной связи.

II. Простые числа-близнецы в натуральном ряде чисел.

Ясное представление о характере и причинах поведения простых чисел в натуральном ряде дает возможность рассмотреть с этих позиций и другие «темные» вопросы теории чисел. Правда, предположения и догадки при экспериментальном исследовании распределения простых чисел часто находят свое продолжение в аналитическом исследовании теории чисел. Прежде, чем перейти непосредственно к обсуждению вопроса о поведении чисел-близнецов в натуральном ряде, здесь уместно будет снова привести выдержку из обзора Дона Цагира по аналитическому исследованию данного вопроса.

«Вероятность того, что число порядка **x** является простым, приблизительно равна **1/ln x**. Это означает, что количество простых чисел в интервале длины ***a*** поблизости от ***x*** должно быть примерно равно **a/ln x**, во всяком случае, если длина интервала достаточно велика, чтобы имело смысл заниматься статистикой, но достаточно мала по сравнению с величиной x. Например, в интервале между ста миллионами и ста миллионами плюс 150 000, следует ожидать появления около 8142 простых, так как

$$\frac{150000}{\ln 100000000} = \frac{150000}{18{,}427...} \approx 8142.$$

Соответственно вероятность того, что два заданных числа вблизи x оба окажутся простыми, приблизительно равна $1/\ln^2 x$. Поэтому ожидаемое количество простых чисел-близнецов (т.е. пар простых, отличающихся ровно на 2, вроде 11, 13 или 59, 61) в интервале от x до x + a приблизительно равно $a/\ln^2 x$. На самом деле ожидаемая величина немного больше, поскольку если уже известно, что число n является простым, то это несколько изменяет шансы, что и n + 2 будет простым; например, n + 2 в этом случае заведомо нечётно. Несложные эвристические рассуждения показывают, что ожидаемое количество простых чисел-близнецов в интервале [x, x+a] равно $Ca/\ln^2 x$, где C – постоянная, приблизительно равная 1,3 (точнее C = 1,3203236316...). Так, между числами 100 000 000 и 100 150 000 должно быть примерно $1{,}32\times150000/(18{,}427)^2 \approx 584$ простых чисел-близнецов. В таблице приведены полученные Джоунзом, Лэлом и Бландоном [7] данные о действительном количестве простых чисел и простых чисел-близнецов в этом и в некоторых других интервалах той же длины около больших степеней десяти.

Таблица 15. **Простые и простые числа-близнецы в 8 интервалах длины 150 000.**

интервал [*n*, *n* + 150 000]	число простых		число простых-близнецов	
	ожидаемое	фактическое	ожидаемое	фактическое
n = 100 000 000	8142	8154	584	604
n = 1 000 000 000	7238	7242	461	466
n = 10 000 000 000	6514	6511	374	389
n = 100 000 000 000	5922	5974	309	276
n = 1 000 000 000 000	5429	5433	259	276
n = 10 000 000 000 000	5011	5065	211	208
n = 100 000 000 000 000	4653	4643	191	186
n = 1 000 000 000 000 000	4343	4251	166	161

Видно, что реальные значения очень хорошо согласуются с ожидаемым результатом. Это особенно удивительно для простых чисел-близнецов, так как пока не удается доказать даже тот факт, что их бесконечно много, не говоря уже об асимптотическом законе их распределения»[17].

Действительно, наряду с невозможностью предсказания появления и поведения одиночных простых чисел, наблюдается достаточно строгая закономерность размещения их в числовых промежутках. То есть, имеется возможность статистической обработки достаточно больших областей чисел с приемлемой вероятностью. Тем не менее, до настоящего времени не было известно, что происходит с числами-близнецами на бесконечности, неизвестно конечно или бесконечно множество таких пар чисел.

Что удивительно, из четырех пар порождающих чисел джойнт-ряда три пары являются порождающими числами – близнецами. Это пары чисел:

11 и **13**; **17** и **19**; **29** и **31** (12)

Запишем эти пары чисел как периодические порождающие простые числа-близнецы джойнт-ряда:

(11+30n и 13+30n); (17+30n и 19+30n); (29+30n и 31+30n) (13).

Так как все простые числа формируются восемью порождающими числами, т.е.

Легко заметить, что необходимым, но не достаточным, условием существования чисел-близнецов является совпадение периодов пар чисел джойнт-ряда. Достаточное условие существования – простота чисел этих пар. Если провести статистический анализ первых (n + 1) периодов джойнт-ряда чисел, например для n =60, то картина распределения простых чисел-близнецов предстанет следующим образом.

Во-первых, простые числа-близнецы расположены строго в смежных столбцах таблицы чисел джойнт-ряда, каждое из них – в столбцах соответствующих порождающих чисел.

Во-вторых, трем парам порождающих простых чисел-близнецов соответствуют три пары смежных столбцов джойнт-ряда, помеченные в Таблице 17 цветом: красным, зеленым и синим, соответственно.

В-третьих, каждой паре порождающих простых чисел-близнецов в отмеченных столбцах таблицы соответствуют как простые пары чисел-близнецов (простое простое), так и смешанные (простое – составное) и – чисто составные числа близнецы (составное-составное).

Так при n+1=61 (диапазон чисел от 7 до 1831) имеем следующее <u>количественное</u> распределение перечисленных пар чисел-близнецов:

[17] http://ega-math.narod.ru/Liv/Zagier.htm

n+1 = 61, X∈ 7 – 1831. **Таблица 16.**

Порождающие числа-близнецы	**11 и 13**	**17 и 19**	**29 и 31**	**Суммарное количество**
Кол-во пар простых -----“-----	**21**	**16**	**17**	**54**
Кол-во пар смешанных “------	**30**	**38**	**31**	**99**
Кол-во пар составных “------	**10**	**7**	**13**	**30**
$\sum$	**61**	**61**	**61**	**183**

Из **366** первых чисел джойнт-ряда, соответствующих трем парам порождающих чисел-близнецов, только **108** простых чисел составляют пары чисел-близнецов.

Простые числа джойнт-ряда: **Таблица 17.**

p**(x)** + **q(x)** = **279+209=488 =[**h×**X$_{max}$]=0.26(6)×1831**

n	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
0)	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**
1)	37	41	43	47		53	59	61
2)	67	71	73		79	83	89	
3)	97	101	103	107	109	113		
4)	127	131		137	139		149	151
5)	157		163	167		173	179	181
6)		191	193	197	199			211
7)			223	227	229	233	239	241
8)		251		257		263	269	271
9)	277	281	283			293		
10)	307	311	313	317				331
11)	337			347	349	353	359	
12)	367		373		379	383	389	
13)	397	401			409		419	421
14)		431	433		439	443	449	
15)	457	461	463	467			479	
16)	487	491			499	503	509	
17)		521	523					541
18)	547			557		563	569	571
19)	577			587		593	599	601
20)	607		613	617	619			631
21)		641	643	647		653	659	661
22)			673	677		683		691
23)		701			709		719	
24)	727		733		739	743		751
25)	757	761			769	773		
26)	787			797			809	811
27)		821	823	827	829		839	
28)			853	857	859	863		
29)	877	881	883	887				
30)	907	911			919		929	
31)	937	941		947		953		
32)	967	971		977		983		991
33)	997				1009	1013	1019	1021
34)		1031	1033		1039		1049	1051
35)		1061	1063		1069			
36)	1087	1091	1093	1097		1103	1109	
37)	1117		1123		1129			
38)		1151	1153			1163		1171
39)		1181		1187		1193		1201
40)			1213	1217		1223	1229	1231
41)	1237				1249		1259	
42)				1277	1279	1283	1289	1291
43)	1297	1301	1303	1307			1319	1321

```
44)  1327
45)       1361      1367      1373      1381
46)                      1399      1409
47)            1423 1427 1429 1433 1439
48)  1447 1451 1453      1459           1471
49)       1481 1483 1487 1489 1493 1499
50)       1511                1523      1531
51)            1543      1549 1553 1559
52)  1567 1571           1579 1583
53)  1597 1601      1607 1609 1613 1619 1621
54)  1627           1637
55)  1657      1663 1667 1669
56)            1693 1697 1699      1709
57)       1721 1723           1733      1741
58)  1747      1753      1759
59)  1777      1783 1787 1789           1801
60)       1811                1823      1831
```

Чисто из статистических интересов рассмотрим еще три промежутка чисел джойнт-ряда по 61 периоду чисел на предмет распределения в них указанных выше чисел-близнецов.

n+1 = 61, X∈ 1837 - 3661. **Таблица 18.**

Порождающие числа-близнецы	11 и 13	17 и 19	29 и 31	Суммарное количество
Кол-во пар простых -----“-----	13	13	15	41
Кол-во пар смешанных “------	28	29	34	91
Кол-во пар составных “------	20	19	12	51
$\sum$	61	61	61	183

n+1 = 61, X∈ 3667 - 5491. **Таблица 19.**

Порождающие числа-близнецы	11 и 13	17 и 19	29 и 31	Суммарное количество
Кол-во пар простых -----“-----	14	13	10	37
Кол-во пар смешанных “------	32	27	26	85
Кол-во пар составных “------	15	21	25	61
$\sum$	61	61	61	183

n+1 = 61, X∈ 5497 - 7321. **Таблица 20.**

Порождающие числа-близнецы	11 и 13	17 и 19	29 и 31	Суммарное количество
Кол-во пар простых -----“-----	9	7	14	30
Кол-во пар смешанных “------	33	34	25	92
Кол-во пар составных “------	19	20	22	61
$\sum$	61	61	61	183

Представим полученные результаты в виде гистограммы:
- по оси абсцисс отложены значения периодов повторения чисел джойнт-ряда;
- по оси ординат – количество чисел простых-близнецов, смешанных и составных близнецов чисел в равных промежутках чисел джойнт-ряда (488 чисел джойнт-ряда), но разных диапазонах изменения **X** (7 -1831; 1837 – 3661; 3667 – 5491; 5497 – 7321).

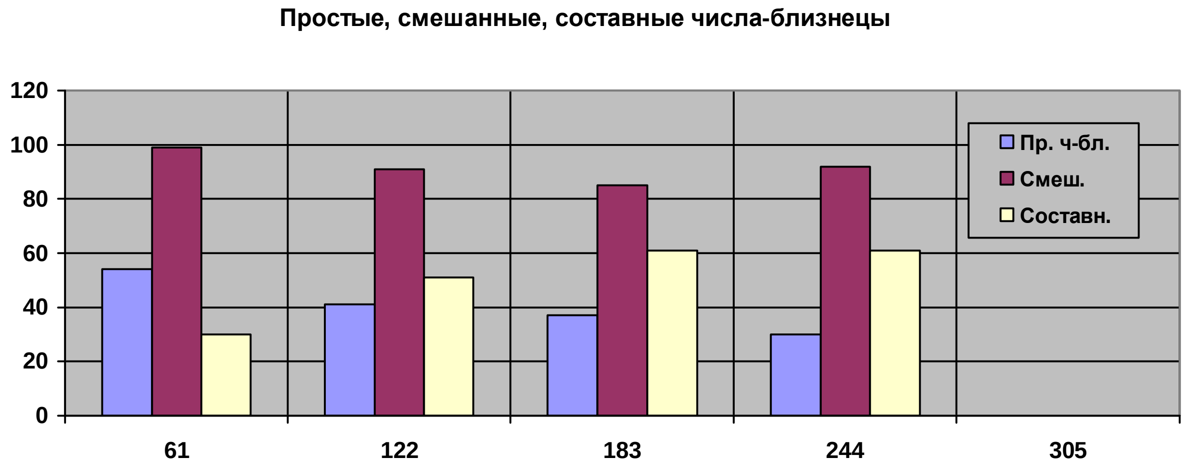

Рис. 3.

Из представленной гистограммы хорошо видна динамика изменения количественного состава каждой группы чисел: количество пар простых чисел-близнецов уменьшается с 54 до 30, число пар смешанных чисел-близнецов «нестабильно» с тенденцией к уменьшению (99-85-92), а число пар составных чисел-близнецов возрастает с 30 до 61. При этом, общее их количество в каждом исследуемом промежутке чисел остается постоянным и равным 183 парам чисел.
Следовательно, можно сформулировать для совокупности всех групп чисел-близнецов закон изменения, аналогичный Закону обратной связи простых и составных из простых сомножителей ≥ 7 чисел:

$$a(X)+b(X)+g(X)=[mX] \qquad (14)$$

где α(X) – *количество пар простых чисел-близнецов;*
β(X) –количество пар смешанных чисел-близнецов (простое - составное или составное – простое);
γ(X) – количество пар составных чисел близнецов (составное – составное, отличающиеся на 2 единицы);
[μX]- целое количество пар всех трех групп чисел близнецов;
μ = 0,2 – структурная постоянная чисел-близнецов джойнт-ряда.

Значение μ находится из следующих соображений. Четыре пары порождающих чисел джойнт-ряда формируют 26,6(6)% всех чисел натурального ряда. Из четырех пар только три пары порождающих чисел (см. выражения 12 и 13) принимают участие в формировании трех групп чисел-близнецов. Поэтому:

$$[\mu X] = [\frac{3}{4} h X] = \frac{3}{4} \times \frac{8}{30} \times X = 0,2X \qquad (15).$$

Следовательно, $\mu = 0,2$ соответствует 20% всех чисел натурального ряда: три группы чисел – близнецов (простые, смешанные и составные) составляют 20% всех чисел натурального ряда чисел. Как показали мы выше, по каждой из порождающих пар простых чисел-близнецов **((11+30n и 13+30n); (17+30n и 19+30n); (29+30n и 31+30n))** имеется три группы чисел – близнецов: простые, смешанные и составные пары чисел. Поэтому, простые числа-близнецы составляют менее одной третьей всех пар чисел-близнецов. То есть, мы можем записать:

$$a(X) \approx \frac{1}{3}[mX] = [0,066(6) \times X] = [n X] \qquad (16)$$

где $n = 0,06(6)$ - структурная постоянная **простых** чисел близнецов.

Более того, в динамике мы видим резкое уменьшение количества простых чисел-близнецов, соответствующее динамике изменения простых чисел в джойнт-ряде и в натуральном ряде, соответственно. Значит, утверждая, что количество простых чисел-близнецов в натуральном ряде менее 6,6(6)% мы, тем не менее, понимаем, что их количество значительно уменьшается в динамике и является следствием распределения простых чисел. А для простых чисел фактором их поведения в натуральном ряде, как мы уже знаем, служит тесная их взаимосвязь с алгоритмическим детерминистским законом формирования составных чисел и общий для них ареал размещения.

В отличие от распределения простых чисел по Закону обратной связи чисел простых и составных, простые числа-близнецы зависят как от пар смешанных чисел, так и от пар составных чисел-близнецов, но, в конечном итоге, их количество напрямую зависит от соотношения простых и составных чисел.

Представим изменение соотношения указанных пар чисел-близнецов для периодов повторения n , значительно превышающих значения n на гистограмме рис.3.

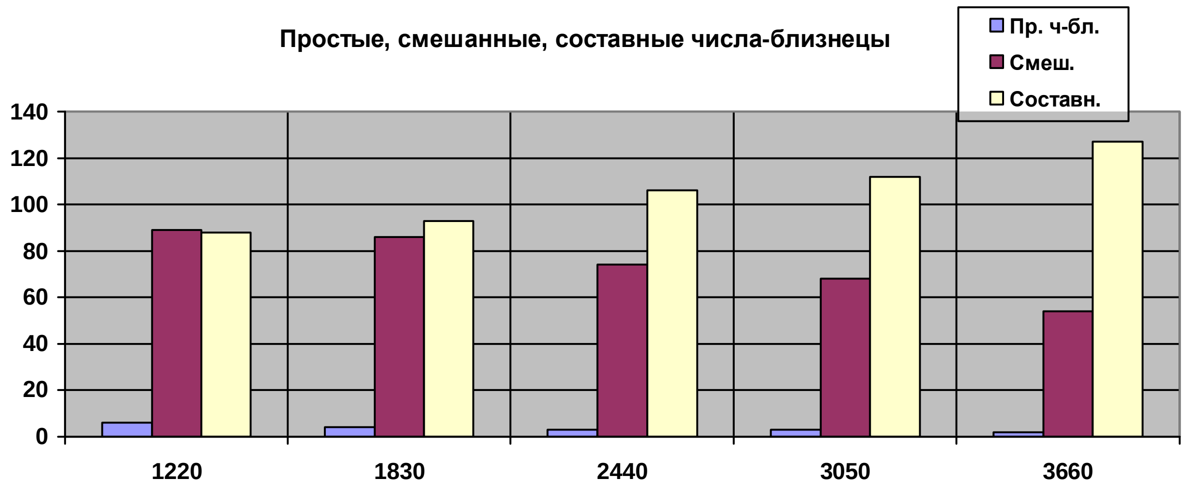

рис.4.

С возрастанием периода $n \to \infty$ наблюдается следующая картина изменения соотношения простых, смешанных и составных чисел-близнецов: простых чисел-близнецов становится так мало, что конкуренция за места расположения в матрице или джойнт-ряде происходит, в основном, только между смешанными и составными парами чисел-близнецов. В соответствии с Законом обратной связи чисел, количество пар составных чисел-близнецов стремится к максимуму и заполняет собой все 24 ячейки матрицы и – периоды джойнт-ряда, исключая, таким образом, появление как простых, так и составных чисел-близнецов.

Но, как мы уже знаем, «вырождаются» не только простые числа, но «вырождаются» и составные числа. Механизм вырождения составных чисел мы уже подробно рассматривали выше в настоящей работе. Здесь уместно констатировать основное: для каждого составного числа из пары сомножителей $\mathbf{X}_{l,m} = \mathbf{(a + 30 \times \mathit{l}) \times (b + 30 \times m)}$ джойнт-ряда чисел существует одна из восьми возможностей сочетания сомножителей (см. Приложение 1, Таблицу VIII)

VIII. Порождающее число 31.

[Таблица VIII. ,4, с.75]

a	**b**	**n(0,0)=***a*
7	**13**	**2**
11	**11**	**3**
19	**19**	**11**
17	**23**	**12**
29	**29**	**27**
31	**31**	**31**
13	**37**	**15**
23	**47**	**35**

по каждому из восьми порождающих чисел. Но, для больших многозначных составных чисел имеется не только набор из всех восьми сочетаний для одного составного числа, но, более того, по каждому из этих восьми возможных сочетаний возникает целый массив сочетаний с различными индексами ***l и m*** в приведенной выше формуле для составного числа.

Приведем пример факторизации составного числа **X = p_i + 30n = 11+30×109 378 104 = 3 281 343 131:**

VALUE N11? 109378104

m	***l***	***a***	***b***
1.562544E+07	**0**	**7**	**23**
18674	**195**	**7**	**23**
9943463	**0**	**11**	**31**
116235	**31**	**11**	**31**
8413700	**0**	**13**	**17**
40167	**90**	**23**	**37**
8940	**407**	**23**	**37**
9286	**392**	**17**	**43**
1384532	**2**	**19**	**29**
281176	**12**	**29**	**49**
125865	**28**	**29**	**49**

В соответствии с формулой $\mathbf{X}_{l,\mathbf{m}}$ **= (a + 30×*l*) × (b +30×m)** выпишем множители составного числа, например, для последнего сочетания в приведенном расчете:

$$\mathbf{X}_{28,125865} = (29+30\times28)(49+30\times125865)=869\times3775999=3281343131,$$

что соответствует заданному выше числу **X = 3 281 343 131.**

Из анализа полученных результатов расчета программы распознавания простоты и факторизации чисел видно, что (см. Таблицу II, [4, с.73]) из восьми возможных сочетаний сомножителей присутствует семь (отсутствует сочетание для a = 31, b = 41 и $a = 42$). Но, уже по каждому из семи сочетаний сомножителей имеется от одного до двух сочетаний с разными индексами ***l*** и ***m.***

Таким образом, можно заключить, что как и для простых чисел, так и для пар простых чисел-близнецов не может быть какого-либо ограничения появления на бесконечности. Более того, в соответствии с Законом обратной связи простых и составных из простых сомножителей ≥ 7 чисел, простые числа и пары простых чисел-близнецов закономерно испытывают как спад их относительного количества, так и подъем, бесконечно повторяя «круги спирали» действия Закона обратной связи.

Сейчас уже можно сделать предварительный вывод, что ни одна из имеющихся в настоящее время приближенных аналитических выражений для распределения простых чисел не может не только точно отображать их количество на бесконечности, но и даже приближенно не может отображать их периодическое изменение на бесконечности. Только абсолютно точный алгоритм построения джойнт-ряда чисел, принадлежащий к классу детерминистских фракталов, раскрывает истину поведения простых чисел и простых чисел-близнецов в натуральном ряде.

Приложение 1.

Новый метод исследования натурального ряда чисел. Простые и составные числа из простых сомножителей ≥ 7.

1П. «Выделение» из натурального ряда чисел, не делящихся на 2, 3 и 5 получается автоматически, если одновременно использовать два свойства чисел: признак деления на 9 и признак деления на 10 для всех чисел натурального ряда. Эти свойства позволяют определить количественный состав чисел джойнт (совместного) ряда, а именно – 26,6(6)% от всего количества чисел натурального ряда.

Матрица, столбцами которой являются 4 цифры: 3; 1; 9; 7, (признак деления на 10), а строками – 6 цифр: 1; 2; 4; 5; 7; 8, (признак деления на 9), на 6×4 =24 числа с периодом повторения T = 90 является ареалом для чисел джойнт ряда. Другими словами, матрица осуществляет скрининг натурального ряда чисел, выделяя только числа джойнт ряда. В качестве примера, приведу первую, вторую матрицу и начало третьей:

Таблица 1П.

	9		**7**				**3**		**1**		**9**		**7**				**3**		**1**		**9**
1		**19**		**37**				**73**		**91**		**109**		**127**				**163**		**181**	
2	**11**		**29**		**47**				**83**		**101**		**119**		**137**				**173**		**191**
4	**13**		**31**		**49**		**67**				**103**		**121**		**139**		**157**				**193**
5		**23**		**41**		**59**		**77**				**113**		**131**		**149**		**167**			
7	**17**			**43**		**61**		**79**		**97**				**133**		**151**		**169**		**187**	
8					**53**		**71**		**89**		**107**				**143**		**161**		**179**		**197**

Зеленым цветом обозначены простые числа: 7; 11; 13; 17…

Красным цветом – составные числа: 49; 77; 91; 121….

Указанные свойства чисел выявляют как количественные, так и качественные закономерности джойнт ряда чисел.

Во-первых, простые и составные из простых сомножителей ≥ 7 числа количественно зависят друг от друга по Закону обратной связи чисел:

$$\boldsymbol{\pi(x) + q(x) = [\eta x]}, \qquad (1П)$$

где: **π(x)**-количество простых чисел, не превышающих число X;
q(x)-количество составных чисел, не превышающих число X;
[ηx]-количество чисел джойнт ряда чисел, не превышающих число X;
η-константа джойнт ряда **(η= 24/90=8/30=0,266(6)).**

Во-вторых, качественно простые и составные из простых сомножителей ≥ 7 числа джойнт ряда находятся в строгой периодической зависимости:

$$\mathbf{p_n = p_i + T \times n,} \qquad (2П)$$

где: n = 0, 1, 2,….,

p_n – простое или составное из простых сомножителей ≥ 7 число периода n;

p_i – одно из восьми так называемых «порождающих» простых чисел:

$$\mathbf{p_i = 7;\ 11;\ 13;\ 17;\ 19;\ 23;\ 29;\ 31,} \qquad (3П)$$

T = 30 – число, соответствующее периоду следования для каждого из восьми порождающих чисел.

Приведу, в качестве примера фрагмент джойнт ряда до n =10:

Таблица 2П.

p**(x) + q(x) = 64 + 24 = 88=[**h´**x_{max}]=[0.266(6)´331], n =10**

0	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**
1	37	41	43	47	49	53	59	61
2	67	71	73	77	79	83	89	91
3	97	101	103	107	109	113	119	121
4	127	131	133	137	139	143	149	151
5	157	161	163	167	169	173	179	181
6	187	191	193	197	199	203	209	211
7	217	221	223	227	229	233	239	241
8	247	251	253	257	259	263	269	271
9	277	281	283	287	289	293	299	301
10	307	311	313	317	319	323	329	331

…………………………………………………………….

Составные числа для этого фрагмента джойнт ряда выглядят следующим образом:

Таблица 3П.

q(x) = 24, n = 10

0)	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**“ порождающие числа”**
1)					**49**				
2)				**77**				**91**	
3)							**119**	**121**	
4)			**133**			**143**			
5)		**161**			**169**				
6)	**187**					**203**	**209**		
7)	**217**	**221**							
8)	**247**		**253**		**259**				
9)				**287**	**289**		**299**	**301**	
10)					**319**	**323**	**329**		

Как нетрудно заметить, ряд составных чисел формируется путем коммутации (перемножения) чисел джойнт ряда. Используем возможность искусственной коммутации элементов джойнт ряда Q(x) с образованием всех возможных сочетаний. Для этого достаточно последовательно перемножить элементы двух идентичных рядов Q(x) по следующему алгоритму:

(7+30*l*)´{(7 + 30m);(11 + 30m);(13 +30m);…(31 +30m)};
(11+30*l*)´{(11 + 30m);(13 +30m);… (31 +30m);(7 +30(m+1))};
(13+30*l*)´{(13+30m);(17+30m);…(7+30(m+1));(11+30(m+1))};

. . . . . .

(31+30*l*)´{(31+30m);(7+30(m+1));… (29+30(m+1))}, (4П)

где $l \leq$ m , l, m = 0, 1, 2, 3, 4…

В обобщенной форме составные числа представляются в следующем виде:

$$\mathbf{p}_{l,m} = (\mathbf{a} + 30\times l) \times (\mathbf{b} + 30\times \mathbf{m}) \qquad (5П),$$

где a и b – порождающие числа p_i, а индексы l и m - номера периодов повторения. И так как каждое число джойнт ряда представимо формулой **(2),** а именно**:**

$$\mathbf{p}_{l,m} = \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_i + \mathbf{T}\times\mathbf{n} = \mathbf{p}_i + 30\times \mathbf{n}(l,\mathbf{m}), \qquad (6П),$$

где: **n(*l*,m)** - период повторения составных чисел джойнт ряда**,** формируемый сочетанием номеров периодов повторения *l и m.*
Из сравнения формул (5П) и (6П) получается выражение, используемое для распознавания простоты и факторизации чисел:

$$\mathbf{n}(l,\mathbf{m}) = \frac{ab - p_i}{30} + \mathbf{a}\times\mathbf{m} + \mathbf{b}\times l + 30\times l\times\mathbf{m} \qquad (7П),$$

Обозначим $\frac{ab - p_i}{30} = \alpha$, тогда (7П) запишем в виде:

$$\mathbf{n}(l,\mathbf{m}) = \alpha + \mathbf{a}\times\mathbf{m} + \mathbf{b}\times l + 30\times l\times\mathbf{m} \qquad (8П).$$

В рабочих программах определения простоты и факторизации чисел используются теоретические (экспериментально проверенные) справочные данные для значений a, b и a для каждого из восьми порождающих чисел p_i(всего - **восемь таблиц**). В качестве примера приведу две из названных таблиц справочных данных для p_i =7 и p_i =31:

I. Порождающее число 7.
[**Таблица I**. ,4, с.73]

a	**b**	**n(0,0)=***a*
11	**17**	**6**
7	**31**	**7**
13	**19**	**8**
23	**29**	**22**
17	**41**	**23**
19	**43**	**27**
29	**53**	**51**
31	**37**	**38**

VIII. Порождающее число 31.
[**Таблица VIII**. ,4, с.75]

a	**b**	**n(0,0)=***a*
7	**13**	**2**
11	**11**	**3**
19	**19**	**11**
17	**23**	**12**
29	**29**	**27**
31	**31**	**31**
13	**37**	**15**
23	**47**	**35**

Эффективность работы программ ЭВМ по представленному алгоритму определяется во-первых, количеством чисел джойнт ряда (26,6(6)% всего количества чисел натурального ряда) и во-вторых, принципиальным отличием: алгоритм распознавания простоты и факторизации чисел построен на синтезе (***т.е. только на перемножении сомножителей)*** составных чисел по формуле (5П) для вычисленного периода повторения джойнт ряда заданного произвольного числа.

2П.Все вопросы, связанные с таинственностью и неопределенностью появления простых чисел в натуральном ряде становятся ясными и понятными. Сейчас можно убедительно заявить, что распределение простых чисел в натуральном ряде является следствием как взаимодействия простых чисел между собой, так и – между составными числами. Количественно это взаимодействие выражено Законом обратной связи (1П); качественно – алгоритмом (4П) формирования составных чисел джойнт ряда. В общем виде формирование простых чисел в натуральном ряде представляется выражением (9П) и рассчитывается по алгоритму (10П):

$$X_{p_i,n} = X_{J_i,n} - X_{Q_i,n} \qquad (9\text{П}),$$

где: $X_{p_i,n}$ - простые числа по порождающему числу $\boldsymbol{p_i}$ = (7;11;13;17;19;23;29;31) для
$\boldsymbol{n}$ –ого периода джойнт ряда чисел;
$X_{J_i,n}$ - числа джойнт ряда $\boldsymbol{J_i = p_i + 30n}$ для $\boldsymbol{n}$ –ого периода;
$X_{Q,n}$ - составные числа джойнт ряда, рассчитываемые по алгоритму (4П).

Запишем выражение (9П) в виде алгоритма:

$$X_{p_i,n} = (p_i + 30n) - (a + 30l)(b + 30m), \qquad (10П),$$

где: ***a*** и ***b*** - справочные числа из таблиц **I – VIII** [4, с.73-75] для соответствующего порождающего числа $\boldsymbol{p_i}$ = (7;11;13;17;19;23;29;31);

l и ***m*** - периоды повторения множителей составного числа, причем $\boldsymbol{l \le m}$ и максимальное значение ***m*** для заданного числа ***n*** равно [4, с. 76]:

$$\mathbf{m_{opt}} = \frac{h}{2^4} \times \{-(a+b) + \sqrt{(a+b)^2 + \frac{2^5}{h}(n-a)}\ \} \qquad (11П).$$

Первая тысяча (точнее, 1006) простых чисел, рассчитанных по этому алгоритму, представлены в таблице 4П:

Таблица 4П.

Первые одна тысяча шесть (1006) простых чисел джойнт ряда, без 2,3 и 5 (n=0…266)

p(x) + q(x) = 1006 + 1130 =2136 =[$h\times \mathbf{x_{max}}$]= [0.26(6)×8011] = [(n+1)×30h] = 267×8

n	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8
0)	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**
1)	37	41	43	47		53	59	61
2)	67	71	73		79	83	89	
3)	97	101	103	107	109	113		
4)	127	131		137	139		149	151
5)	157		163	167		173	179	181
6)		191	193	197	199			211
7)			223	227	229	233	239	241
8)		251		257		263	269	271
9)	277	281	283			293		
10)	307	311	313	317				331
11)	337			347	349	353	359	
12)	367		373		379	383	389	
13)	397	401			409		419	421
14)		431	433		439	443	449	
15)	457	461	463	467			479	
16)	487	491			499	503	509	
17)		521	523					541
18)	547			557		563	569	571
19)	577			587		593	599	601
20)	607		613	617	619			631
21)		641	643	647		653	659	661
22)			673	677		683		691
23)		701			709		719	
24)	727		733		739	743		751
25)	757	761			769	773		
26)	787			797			809	811
27)		821	823	827	829		839	
28)			853	857	859	863		
29)	877	881	883	887				
30)	907	911			919		929	
31)	937	941		947		953		
32)	967	971		977		983		991
33)	997				1009	1013	1019	1021
34)		1031	1033		1039		1049	1051

35)		1061	1063		1069			
36)	1087	1091	1093	1097		1103	1109	
37)	1117		1123		1129			
38)		1151	1153			1163		1171
39)		1181		1187		1193		1201
40)			1213	1217		1223	1229	1231
41)	1237				1249		1259	
42)				1277	1279	1283	1289	1291
43)	1297	1301	1303	1307			1319	1321
44)	1327							
45)		1361		1367		1373		1381
46)					1399		1409	
47)			1423	1427	1429	1433	1439	
48)	1447	1451	1453		1459			1471
49)		1481	1483	1487	1489	1493	1499	
50)		1511				1523		1531
51)			1543		1549	1553	1559	
52)	1567	1571			1579	1583		
53)	1597	1601		1607	1609	1613	1619	1621
54)	1627			1637				
55)	1657		1663	1667	1669			
56)			1693	1697	1699		1709	
57)		1721	1723			1733		1741
58)	1747		1753		1759			
59)	1777		1783	1787	1789			1801
60)		1811				1823		1831
61)				1847				1861
62)	1867	1871	1873	1877	1879		1889	
63)		1901		1907		1913		
64)		1931	1933				1949	1951
65)						1973	1979	
66)	1987		1993	1997	1999	2003		2011
67)	2017			2027	2029		2039	
68)			2053			2063	2069	
69)		2081	2083	2087	2089		2099	
70)		2111	2113				2129	2131
71)	2137	2141	2143			2153		2161
72)					2179			
73)			2203	2207		2213		2221
74)				2237	2239	2243		2251
75)				2267	2269	2273		2281
76)	2287		2293	2297			2309	2311
77)						2333	2339	2341
78)	2347	2351		2357				2371
79)	2377	2381	2383		2389	2393	2399	
80)		2411		2417		2423		
81)	2437	2441		2447			2459	
82)	2467		2473	2477				
83)			2503					2521
84)		2531			2539	2543	2549	2551
85)	2557						2579	
86)		2591	2593				2609	
87)	2617	2621				2633		
88)	2647			2657	2659	2663		2671
89)	2677		2683	2687	2689	2693	2699	
90)	2707	2711	2713		2719		2729	2731
91)		2741			2749	2753		
92)	2767			2777			2789	2791
93)	2797	2801	2803				2819	
94)			2833	2837		2843		2851
95)	2857	2861					2879	
96)	2887			2897		2903	2909	
97)	2917			2927			2939	
98)			2953	2957		2963	2969	2971
99)							2999	3001
100)		3011			3019	3023		
101)	3037	3041			3049			3061
102)	3067				3079	3083	3089	

103)					3109		3119	3121
104)				3137				
105)			3163	3167	3169			3181
106)	3187	3191				3203	3209	
107)	3217	3221			3229			
108)		3251	3253	3257	3259			3271
109)							3299	3301
110)	3307		3313		3319	3323	3329	3331
111)			3343	3347			3359	3361
112)		3371	3373				3389	3391
113)				3407		3413		
114)			3433				3449	
115)	3457	3461	3463	3467	3469			
116)		3491			3499			3511
117)	3517			3527	3529	3533	3539	3541
118)	3547			3557	3559			3571
119)		3581	3583			3593		
120)	3607		3613	3617		3623		3631
121)	3637		3643				3659	
122)		3671	3673	3677				3691
123)	3697	3701			3709		3719	
124)	3727		3733		3739			
125)		3761		3767	3769		3779	
126)			3793	3797		3803		
127)		3821	3823			3833		
128)	3847	3851	3853			3863		
129)	3877	3881			3889			
130)	3907	3911		3917	3919	3923	3929	3931
131)			3943	3947				
132)	3967						3989	
133)		4001	4003	4007		4013	4019	4021
134)	4027						4049	4051
135)	4057					4073	4079	
136)		4091	4093		4099			4111
137)				4127	4129	4133	4139	
138)			4153	4157	4159			
139)	4177							4201
140)		4211		4217	4219		4229	4231
141)		4241	4243			4253	4259	4261
142)		4271	4273			4283	4289	
143)	4297							
144)	4327			4337	4339		4349	
145)	4357		4363			4373		
146)		4391		4397			4409	
147)		4421	4423					4441
148)	4447	4451		4457		4463		
149)		4481	4483			4493		
150)	4507		4513	4517	4519	4523		
151)				4547	4549			4561
152)	4567					4583		4591
153)	4597		4603					4621
154)				4637	4639	4643	4649	4651
155)	4657		4663			4673	4679	
156)		4691				4703		
157)		4721	4723		4729	4733		
158)		4751			4759			
159)			4783	4787	4789	4793	4799	4801
160)			4813	4817				4831
161)								4861
162)		4871		4877			4889	
163)			4903		4909		4919	
164)		4931	4933	4937		4943		4951
165)	4957			4967	4969	4973		
166)	4987		4993		4999	5003	5009	5011
167)		5021	5023				5039	
168)		5051			5059			
169)	5077	5081		5087			5099	5101
170)	5107		5113		5119			

171)				5147		5153		
172)	5167	5171			5179		5189	
173)	5197				5209			
174)	5227	5231	5233	5237				
175)		5261				5273	5279	5281
176)				5297		5303	5309	
177)			5323			5333		
178)	5347	5351						
179)		5381		5387		5393	5399	
180)	5407		5413	5417	5419			5431
181)	5437	5441	5443		5449			
182)		5471		5477	5479	5483		
183)		5501	5503	5507			5519	5521
184)	5527	5531						
185)	5557		5563		5569	5573		5581
186)		5591						
187)			5623		5639			5641
188)	5647	5651	5653	5657	5659		5669	
189)			5683		5689	5693		5701
190)		5711		5717				
191)	5737	5741	5743		5749			
192)					5779	5783		5791
193)		5801		5807		5813		5821
194)	5827				5839	5843	5849	5851
195)	5857	5861		5867	5869		5879	5881
196)				5897		5903		
197)			5923	5927			5939	
198)			5953					
199)		5981		5987				
200)	6007	6011					6029	
201)	6037		6043	6047		6053		
202)	6067		6073		6079		6089	6091
203)		6101				6113		6121
204)		6131	6133			6143		6151
205)			6163			6173		
206)				6197	6199	6203		6211
207)	6217	6221			6229			
208)	6247			6257		6263	6269	6271
209)	6277			6287			6299	6301
210)		6311		6317		6323	6329	
211)	6337		6343			6353	6359	6361
212)	6367		6373		6379		6389	
213)	6397							6421
214)	6427						6449	6451
215)					6469	6473		6481
216)		6491						
217)		6521			6529			
218)	6547	6551	6553			6563	6569	6571
219)	6577	6581					6599	
220)	6607				6619			
221)	6637					6653	6659	6661
222)			6673		6679		6689	6691
223)		6701	6703		6709		6719	
224)			6733	6737				
225)		6761	6763				6779	6781
226)		6791	6793			6803		
227)			6823	6827	6829	6833		6841
228)				6857		6863	6869	6871
229)			6883				6899	
230)	6907	6911		6917				
231)				6947	6949		6959	6961
232)	6967	6971		6977		6983		6991
233)	6997	7001				7013	7019	
234)	7027				7039	7043		
235)	7057				7069		7079	
236)						7103	7109	
237)		7121		7127	7129			
238)		7151			7159			

239)	7177			7187		7193		
240)	7207	7211	7213		7219		7229	
241)	7237		7243	7247		7253		
242)						7283		
243)	7297			7307	7309			7321
244)		7331	7333				7349	7351
245)					7369			
246)			7393					7411
247)	7417					7433		
248)		7451		7457	7459			
249)	7477	7481		7487	7489		7499	
250)	7507			7517		7523	7529	
251)	7537	7541		7547	7549		7559	7561
252)			7573	7577		7583	7589	7591
253)			7603	7607				7621
254)					7639	7643	7649	
255)					7669	7673		7681
256)	7687	7691			7699	7703		
257)	7717		7723	7727				7741
258)			7753	7757	7759			
259)					7789	7793		
260)				7817		7823	7829	
261)		7841				7853		
262)	7867		7873	7877	7879	7883		
263)		7901		7907			7919	
264)	7927		7933	7937			7949	7951
265)			7963					
266)			7993				8009	8011

3П. Проиллюстрируем распределение простых чисел в натуральном ряде графиком рассчитанных нормированных значений простых $\frac{p(x)}{hx}$ и составных $\frac{q(x)}{hx}$ чисел до значений $x \leq 10^9$.

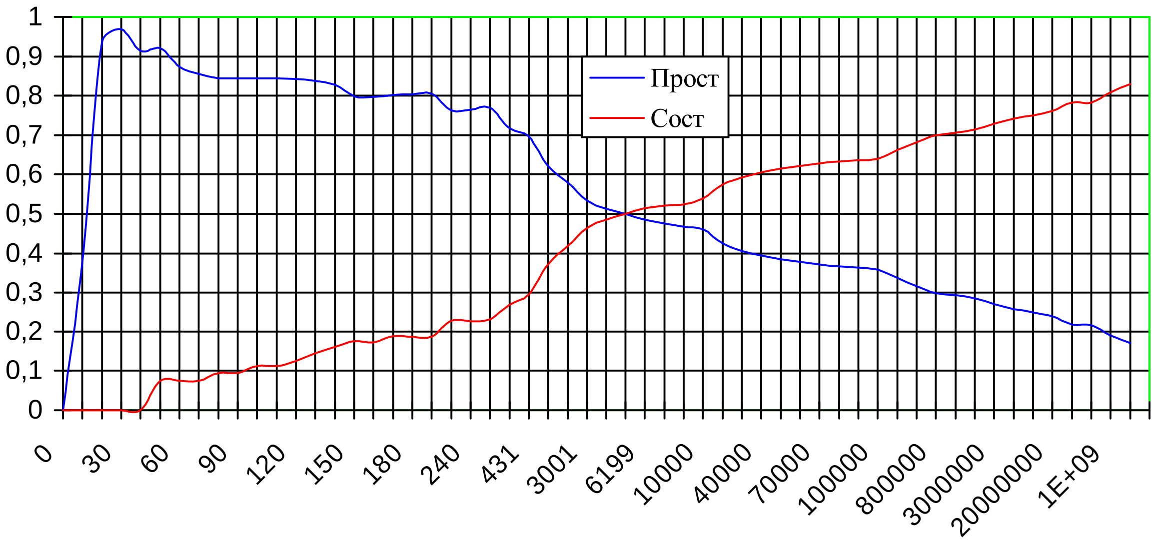

Рис.1П. Рассчитанные нормированные значения
количества простых $\frac{p(x)}{hx}$ и составных $\frac{q(x)}{hx}$ чисел в натуральном ряде чисел.

Графически распределение простых и составных чисел представляют собой зеркально симметричные кривые относительно оси симметрии у = $\frac{1}{2}$ на оси ординат. Это является подтверждением взаимосвязи и взаимодействия простых и составных чисел по Закону обратной связи чисел**:** $\pi(x) + q(x) = [\eta x]$.

4П.Джойнт ряд обладает фрактальными свойствами, т.е. является, по существу, фракталом. Перечислим основные признаки фрактала и их соответствие свойствам джойнт ряда.

1) Отличительной чертой фракталов является то, что их невозможно задать функцией или аналитической формулой. Они могут быть представлены только алгоритмом построения.

2) Главная идея фрактальности – самоподобие (скейлинг). Так или иначе, фракталы в большом и малом повторяют сами себя. На разных масштабных уровнях работает один и тот же закон.

3) Фракталы, принципиально, отображают нелинейные процессы, в которых обязательно присутствует обратная связь.

4) Заметим, что только класс детерминистских фракталов имеет четкий и однозначный алгоритм построения.

Опуская рассуждение о Хаусдорфовой размерности для числовых рядов, отметим, что джойнт ряд чисел удовлетворяет все четырем перечисленным свойствам фракталов, а именно.

1) Джойнт ряд невозможно задать функцией или аналитической формулой, так как он состоит из восьми самостоятельных рядов чисел, объединяемых в джойнт ряд структурной постоянной η*= 0,266(6).*

2) Скейлинг в джойнт ряду существует в трех видах. Во-первых, восемь «порождающих» чисел (1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29) с периодом повторения $T_ч$ = 30; во-вторых, числовая матрица на 6×4 = 24 числа с периодом повторения $T_м$ = 90 и, в третьих, сам закон обратной связи чисел $q(x) + \pi(x) = [\eta x]$ создает «расширяющиеся по величине чисел спирали» самоподобия. Механизм образования составных чисел q(x) и их количественное возрастание нам известны, а следовательно, известен и механизм образования и уменьшения количества простых чисел. Механизм возрождения количества простых чисел заключается в вырождении закона формирования составных чисел: чем больше количество составных чисел, тем больше возникает повторных составных чисел (то есть чисел, занимающих одно и то же место в джойнт ряду).

3) Кривые, изображающие джойнт ряд простых и составных чисел, имеют нелинейный «изрезанный» характер в силу закона обратной связи чисел $q(x) + \pi(x) = [\eta x]$.

4) Четкий и однозначный алгоритм построения джойнт ряда (см. выражение 4П) говорит о принадлежности джойнт ряда к классу детерминистских фракталов.

* * *

Приложение 2:

В аналитической теории чисел большой интерес представляет дзета функция Римана:

$$z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p(1-\frac{1}{p^s})^{-1} \qquad (1Пр.),$$

при n = 1, 2, 3,…, p = 2, 3, 5, 7, …., которая играет фундаментальную роль в теории простых чисел. Суммирование распространяется на все натуральные числа, а произведение – на все простые. Эти выражения сходятся абсолютно для всех комплексных **s,** действительная часть которых больше 1. Однако функцию можно продолжить аналитически методами теории функции комплексного переменного. Риман использовал теоремы, для которых, к сожалению, не дал доказательств. Он утверждал, что функция $z(s)$ имеет бесконечное число нулей, действительная часть которых лежит в полосе между 0 и 1. Они симметричны не только относительно действительной оси, но и относительно прямой $s=\frac{1}{2}$. Риман заметил, что число нулей в полосе, ординаты которых лежат между 0 (исключается) и T (включается) приближенно равно:

$$\frac{T}{2p}(\ln\frac{T}{2p}-1) \qquad (2Пр.)$$

Он добавил также, что все нули, вероятно, имеют действительную часть, равную $\frac{1}{2}$. Из всех свойств z - функции, указанных Риманом, лишь одно остается пока сомнительным, но такое, которое не имеет первостепенной важности для теории, а именно: действительные части всех комплексных корней z - функции равны $\frac{1}{2}$.

Не вдаваясь в дальнейшие подробности анализа z - функции Римана методами теории функций комплексного переменного, рассмотрим возможность использования квазигармонического ряда в аналитической теории чисел.

«Древнегреческая математика вырастала в спорах о бесконечном. Еще в V веке до н. э. философ Зенон Элейский показал, к каким результатам приводит беспечное обращение с этим таинственным понятием. Он “доказывал”, например, что быстроногий Ахиллес никогда не догонит медленно ползущую черепаху, что летящая стрела никогда не сдвинется с места и другие, столь же парадоксальные вещи. В основе этих парадоксов лежала возможность разбить отрезок на бесконечное количество неравных частей. Для этого достаточно разбить отрезок сначала пополам, потом одну из полученных частей разбить снова пополам и продолжать эту операцию много раз.

После парадоксов Зенона понятие бесконечности было надолго изгнано из математики и лишь в XVII веке оно было восстановлено в правах. Без него не мыслимо было создание новой науки – математического анализа. А одним из самых могучих средств этой науки были бесконечные ряды, т.е. суммы, состоящие из бесконечного множества слагаемых. Ведь уже рассуждение Зенона означало, что ***целое*** состоит их суммы половины, четверти, восьмой и т. д. , т.е. опиралось на равенство:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1 \qquad (3Пр.)$$

Более общим, чем (3Пр.) является равенство:

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots=\frac{1}{1-q} \qquad (4Пр.),$$

верное лишь при $|q|<1$.»[18].

Используем остроумное доказательство Эйлером теоремы о бесконечном количестве простых чисел. Это доказательство основано на выявлении противоречия конечного с бесконечным. Следствием этого доказательства явилось тождество при **s** > 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_p (1-\frac{1}{p^s})^{-1} \qquad (5Пр.),$$

которое при комплексных значениях s носит название *дзета-функции Римана*.

Положим в выражении (4Пр) $q = \frac{1}{p_J}$, где p_J – простые ≥ 7 числа джойнт-ряда.

Выпишем полученные равенства:

[18] Н.Я. Виленкин. В таинственном мире бесконечных рядов. Квант. №10, 1989, с. 21.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \ldots + \frac{1}{7^n} + \ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{11}} = 1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \ldots + \frac{1}{11^n} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_J}} = 1 + \frac{1}{p_J} + \frac{1}{p_J^{\,2}} + \ldots + \frac{1}{p_J^{\,n}} + \ldots \qquad (6Пр)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Перемножим эти равенства для всех простых чисел джойнт-ряда:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{7}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{11}} \times \frac{1}{1+\frac{1}{13}} \times \ldots \times \frac{1}{1+\frac{1}{p_J}} =$$

$$= (1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{1}{7^n} + \ldots) \times$$

$$\times (1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^3} + \ldots + \frac{1}{11^n} + \ldots) \times$$

$$\times (1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^3} + \ldots + \frac{1}{13^n} + \ldots) \times \qquad (7Пр).$$

$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \times$$

$$\times (1 + \frac{1}{p_J} + \frac{1}{p_J^{\,2}} + \frac{1}{p_J^{\,3}} + \ldots + \frac{1}{p_J^{\,n}} + \ldots)$$

Если перемножить все члены в правой части равенства (7Пр), то в результате мы получим сумму слагаемых вида $\frac{1}{7^{k_1}11^{k_2}13^{k_3}\ldots p_J^{\,k_J}}$, где $k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots, k_J$ – произвольные неотрицательные целые числа. Так как джойнт-ряд состоит из простых чисел ≥ 7 и составных из простых сомножителей ≥ 7 чисел, то среди чисел $7^{k_1}11^{k_2}13^{k_3}\ldots p_J^{\,k_J}$ по одному разу встречаются все числа джойнт-ряда. Следовательно, правая часть равенства (7Пр) представляет собой сумму единицы и бесконечного квазигармонического ряда:

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+...+\frac{1}{J_n}+... \qquad (8Пр).$$

Теперь остается записать левую и правую части (7Пр) в сокращенном символическом виде:

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1-\frac{1}{p_{J},_{i}})^{-1}=1+\sum_{i=1}^{\infty}J_i^{-1} \qquad (9Пр),$$

где J_i – 7; 11; 13; 17; 19…49, 51,…77…, - числа джойнт-ряда;

$p_{J,i}$ - простые числа джойнт-ряда: 7,11,13, … и суммирование распространяется на все числа джойнт-ряда, а произведение – на все простые числа джойнт ряда.

Чтобы убедиться в справедливости выражения (9Пр) представим результаты расчета на графике, рис.1Пр.

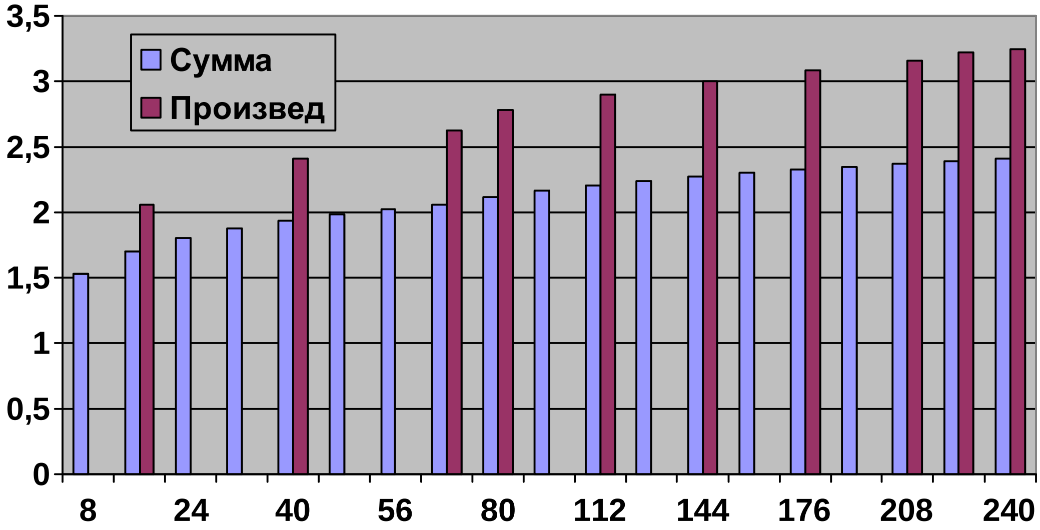

Рис.1Пр.

Заметим, что в промежутке чисел от 667 до 781 произведение (левая часть выражения 9Пр) возрастает на 2,75%, а в промежутке 787 – 901 - на 2,79%. Тогда как сумма (правая часть выражения 9Пр) в этих же промежутках чисел возрастает на 2,3713% и 1,6032% соответственно. Но, уже в промежутке чисел от 6967 до 7103 произведение возрастает на 0,2282%, а в промежутке 7109 – 7243 - на 0,2231%. А сумма в этих же промежутках чисел возрастает на 0,2273% и 0,2058% соответственно. Можно сделать вывод, что чем больше значения чисел J_i *и* $p_{J,i}$, тем медленнее растут как сумма, так и произведение и - тем меньше разница между скоростью прироста суммы и произведения. И так как относительное количество простых чисел становится меньше, то и их вклад в общее произведение становится незначительным. Следовательно, при X$\to\infty$ выражение (9Пр) становится точным.

Умножим левую и правую части выражения (5Пр) на структурную постоянную $h = 0,266(6) = \frac{24}{90} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$, и положим степень **s** равной 1:

$$h\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = h\prod_p (1-\frac{1}{p})^{-1} \qquad (10Пр)$$

Раскроем правую часть этого выражения для первых восьми простых чисел:

$$h\prod_1^8 (1-\frac{1}{p})^{-1} = h(1-\frac{1}{2})^{-1}(1-\frac{1}{3})^{-1}(1-\frac{1}{5})^{-1}(1-\frac{1}{7})^{-1}(1-\frac{1}{11})^{-1}(1-\frac{1}{13})^{-1}(1-\frac{1}{17})^{-1}(1-\frac{1}{19})^{-1}$$

Легко заметить, что первые три сомножителя сокращаются, т.е. при умножении на структурную постоянную h получается единица:

$$\frac{4}{15}\times\frac{2\times3\times5}{2\times4} = 1$$

Таким образом, структурную постоянную можно записать следующим выражением:

$$h = 0,266(6) = \frac{24}{90} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15} = (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5}) \qquad (11Пр)$$

Ясно, что умножение на структурную постоянную исключает «простые» числа 2, 3 и 5 из ряда всех простых чисел. Следовательно, можно записать следующее тождество, учитывая соответствие количества сомножителей:

$$h\prod_1^{(k+3)\to\infty} (1-\frac{1}{p})^{-1} = \prod_{i=1}^{k\to\infty}(1-\frac{1}{p_{J,i}})^{-1} \qquad (12Пр)$$

В этом легко убедиться, раскрыв скобки данных выражений, например, для $k = 8$:

$$\prod_1^{k+3=11} (1-\frac{1}{p})^{-1} = \{h\times2\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}\}\times\frac{7}{6}\times\frac{11}{10}\times\frac{13}{12}\times\frac{17}{16}\times\frac{19}{18}\times\frac{23}{22}\times\frac{29}{28}\times\frac{31}{30}$$
$$\prod_{i=1}^{k=8}(1-\frac{1}{p_{J,i}})^{-1} = \frac{11}{10}\times\frac{13}{12}\times\frac{17}{16}\times\frac{19}{18}\times\frac{23}{22}\times\frac{29}{28}\times\frac{31}{30} \qquad (13Пр)$$

Приведем выражение (12Пр) в полном виде:

$$h\prod_{1}^{(k+3)\to\infty}(1-\frac{1}{p})^{-1}=h\sum_{1}^{(k+3)\to\infty}n^{-1}=\prod_{i=1}^{k\to\infty}(1-\frac{1}{p_{J,i}})^{-1}=1+\sum_{i=1}^{\infty}J_i^{-1} \qquad (14Пр)$$

и подставляя из (8) сумму гармонического ряда, получим:

$$\begin{aligned}&h\prod_{1}^{(k+3)\to\infty}(1-\frac{1}{p})^{-1}=h\sum_{1}^{(k+3)\to\infty}n^{-1}=\prod_{i=1}^{k\to\infty}(1-\frac{1}{p_{J,i}})^{-1}=\\&=1+h\sum_{i=1}^{\infty}n^{-1}-hG=h\sum_{i=1}^{\infty}n^{-1}+x\end{aligned} \qquad (15Пр)$$

где $x=1-hG=1-0,266(6)\times 0,7834057=0,7910918$.

И в общем виде, для бесконечного количества простых чисел, т.е. когда степень s>1имеем:

$$h\prod_{1}^{(k+3)\to\infty}(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}=h\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}+x \qquad (16Пр).$$

* * *

Примечание

1. Саймон Сингх. **Великая теорема Ферма**. МЦНМО, 2000, с.258.
2. **Математический энциклопедический словарь**. Гл. редактор Ю.В. Прохоров, М. «Советская энциклопедия», 1988, с.503.
3. А.В. Баяндин. **К распределению простых чисел в натуральном ряду чисел**. Новосибирск, «НАУКА», 1999, СИФ РАН,-40.
4. А.В. Баяндин. **Методологический принцип обратной связи в естествознании.** Новосибирск, Институт теплофизики СО РАН, 2003, -100.
5. В. Боро, Д. Цагир, Ю. Рольфс. **Живые числа, 5 экскурсий**. Пер. с нем. Е.Б. Гладковой, М., «МИР», 1985г.
6. D.Shanks, On maximal gaps between successive primes, Math. Comp. 18 (1964), 646–651
7. M.F.Jones, M.Lal, W.J.Blundon, Statistics on certain large primes, Math. Comp. 21 (1967), 103–107.
8. А.В. Баяндин. Принцип обратной связи в концепции детерминизма структуры Вселенной. “Философия науки”, № 1(9), Новосибирск, 2001, СО РАН, ИФиПр.
9. А.В.Баяндин **Авторское свидетельство № 1229861.** SU 1229861 A1. от 08 января 1986г. Бюл. № 17 от 07.05.86.

ABSTRACT

In the present work the analysis of distribution of prime numbers - twins is carried out(spent) on the basis of the Law of feedback of numbers open by the author.