

ШЕСТИУГОЛЬНЫЕ ФИГУРЫ НА ПЛОСКОСТИ

А.В. Баяндин

Институт философии и права СО РАН, сектор «Философия науки»

Проспект ак. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия

E-mail: bajandin@philosophy.nsc.ru, Тел: 7(3832)-188-344

Природа настолько удивительна в своей целесообразности, как в малом, так и большом, что всегда приводит в восторг вдумчивого человека при исследовании какой-либо проблемы. Проблемы, вопросы, задачи – это то, что приходится решать человеку в его повседневной деятельности. И самые сложные вопросы – это: Почему? Почему идет дождь, снег, град? Почему снег белый? Почему мир таков, каков он есть? На все эти, «почему», не так просто ответить даже в наш просвещенный век. Ученый, как правило, отвечает на вопросы: как, по каким законам и закономерностям, каким образом устроен мир. Ответ на эти вопросы требует от ученого как совершенствования знаний – научных теорий, теории познания, так и совершенствования измерительных средств – средств познания. Кто не задумывался над тем, почему летает самолет? Почему летают птицы? Мы не знаем механизма полета птиц и насекомых, нет научного обоснования подъемной силы самолетов. Теоретически возможное значение подъемной силы самолета во много раз меньше подъемной силы созданных конструкторами и инженерами летательных аппаратов. Пока мы не можем объяснить механизм образования града, молний, происхождение полезных ископаемых, образование месторождений золота, алмазов, хотя и научились делать искусственные алмазы, уже не говоря о том, что такое жизнь. На все подобного рода вопросы ответы должна давать наука, физика, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений Природы, свойства и строение веществ, структуру материи и законы ее движения. **Именно понятия и законы физики лежат в основе всего естествознания, технических и технологических решений. Именно физика претендует на формирование научной картины мира. Но, несмотря на грандиозные успехи, открытия и изобретения, физика сегодня не может дать объяснения простым, на первый взгляд, явлениям. Физика не может объяснить, например, почему кипит вода, как и почему происходят разного рода превращения в веществах с изменением температуры, давления. На основании существующих принципов и законов при 100 градусах С° невозможно образование паровых пузырьков в воде, ибо давление пара в пузырьке радиусом 10 ангстрем достигает 1400 атмосфер. А для перевода молекулы воды в паровую фазу требуется энергия в 13 раз превосходящая среднюю кинетическую энергию молекул в жидкости. Появление такой энергии крайне маловероятно - утверждает современная физика. А вода кипит!**

В таких случаях физика довольствуется констатацией факта и знанием параметров, необходимых для практического применения. Из уравнений Максвелла в электродинамике нельзя объяснить работу обыкновенного

трансформатора. Это дело практики. Таких примеров можно привести тысячи, уже не говоря о понимании живого. В физике нет жизни. В физике не принято отвечать на вопрос "почему?". Физика достаивает иногда ответа, как это делается, как это происходит, без особого уточнения конкретного способа или механизма, да и то с определенной степенью вероятности.¹

Поэтому очень сложно ответить на вопрос: А почему это так, а не иначе? Здесь, в сути этого вопроса, усматривается некая целесообразность самой природы. А уже под целесообразностью скрывается некий замысел, смысл, разум, причина всего сущего и т.п. Таким образом, можно далеко зайти в этом направлении и не решить поставленной перед человеком конкретной практической проблемы. Тем не менее, вопросы такого порядка всегда очень занимательны и ответы на них понемногу рассеивают пелену незнания с тайного покрыва Истины.

К одной из маленьких тайн Природы можно отнести вопрос о форме объектов вообще и формообразующих соотношениях, в частности. Отношения, соотношения, функциональные зависимости – всё это характеризует взаимосвязь причины и следствия, зависимость одних проявлений природы от других. Конечно, то, что видит исследователь при анализе какого – либо объекта природы – не является следствием одной конечной причины. Более того, и причин, как правило, значительно более одной и следствий – множество. И следствия отличаются друг от друга качественно и количественно. И самое существенное, что «все в мире изменяется», “πᾶντα ῥεῖ”² – все течет – как утверждал в свое время в VI веке до н.э. Гераклит. Нет ничего вечного, не подверженного влиянию времени. Но так уж устроено мышление человека, что научное познание им окружающего мира возможно лишь посредством построения моделей, мысленных или вещественных, реального мира. Модели лишь имитируют действительность, упрощая ее связи и свойства, выделяя при этом существенные, с точки зрения наблюдателя, стороны явления. Следовательно, и предметы труда, вещи, созданные человеком, отражают на себе односторонность, ограниченность используемых свойств материала, связей и взаимосвязей его внутренней структуры. Таким путем человек создает искусственный мир окружающих его вещей и объектов. Но, это уже вопрос для отдельной работы, поэтому вернемся к нашей теме о формообразующих соотношениях для плоских фигур.

Затронутая нами проблема тесно граничит с вопросом о выводе пространственных групп симметрии кристаллов³, описанных Е.С. Федоровым в 1891 году, а также – задачей плотной упаковки шаров, при которой они занимают наименьший объем. Вторая задача была

¹ А.П. Смирнов. Кризис современной физики. С-Пб. 1999, стр.5

² (πᾶντα ῥεῖ – др. греч. – все течет)

³ Е.С. Федоров. Симметрия правильных систем фигур. Записки СПб минералогического общества. 1891, сер.2, вып. 4, 28, стр. 1-227 (вывод 230 пространственных групп симметрии кристаллов).

сформулирована И.С. Кеплером в 1611 году в его небольшом сочинении «О шестиугольных снежинках»⁴. Основное внимание в изысканиях Е.С. Федорова было уделено нахождению и обоснованию фигур с различными видами пространственной симметрии: сдвиговой, трансляционной, зеркальной и т.п. Поставленная И. Кеплером задача была им же решена чисто эмпирически. Найденная им гранецентрированная кубическая решетка имеет коэффициент заполнения пространства 74,04%. Гипотеза Кеплера утверждает, что среди множества бесконечно многих вариантов расположения шаров нет ни одного такого, у которого коэффициент заполнения пространства был бы больше, чем у гранецентрированной кубической решетки. Теоретически необходимо доказать, что это невозможно не только для регулярного, но и для случайного, хаотического, варианта расположения шаров. За последние 380 лет никому не удалось доказать, что гранецентрированная кубическая решетка действительно служит оптимальной стратегией упаковки. Но никто пока не открыл более эффективного метода упаковки. Отсутствие контрпримера означает, что для всех практических целей утверждение Кеплера применимо, но в абсолютном мире математики абсолютно необходимо строгое доказательство.

Несмотря на отсутствие полного доказательства, за прошедшие со времен Кеплера столетия было пройдено несколько вех на пути к решению. В 1892г. скандинавский математик Аксель Туэ нашел доказательство для двумерного аналога проблемы Кеплера, т.е. обнаружил наиболее эффективное расположение шаров в одном-единственном слое, или, иначе говоря, укладки апельсинов не в ящике, а на подносе. Решением оказалось гексагональное расположение шаров. В последствии Тот, Сегрэ и Малер пришли к тому же заключению, но ни один из использованных в двумерном случае методов не применим к исходной трехмерной проблеме Кеплера.⁵

В кратко описанных нами проблемах, так или иначе, но ставятся все те же вопросы: как, каким образом, какие из... наиболее оптимальны, но нет ответов на интересующий нас вопрос: А почему так, и не иначе?

В частности, нас интересуют такие вопросы:

- 1) Какие формы симметричных фигур на плоскости предпочитает природа?
- 2) Почему, каким образом, в каких случаях предпочтение отдается одним формам, и отвергаются другие?

1. Оптимальные фигуры многоугольников на плоскости.

Из всего многообразия многоугольников природа выделяет только три, а именно:

- Ø Равносторонний треугольник;

⁴ И. Кеплер. О шестиугольных снежинках. Перевод с латинского Ю.А. Данилина. Изд. «НАУКА». М. 1983.

⁵ Саймон Сингх. Великая теорема Ферма. Перевод с английского Ю.А. Данилова. МЦНМО, 2000, стр. 263

- Ø Квадрат;
- Ø Правильный шестиугольник.

Эти фигуры имеют одно общее свойство: только этими фигурами можно покрыть плоскость без зазоров (каждым типом фигур в отдельности). Никакие другие правильные многоугольники не подходят для этой цели. На рис.1 представлены фрагменты заполнения плоскости перечисленными выше фигурами.

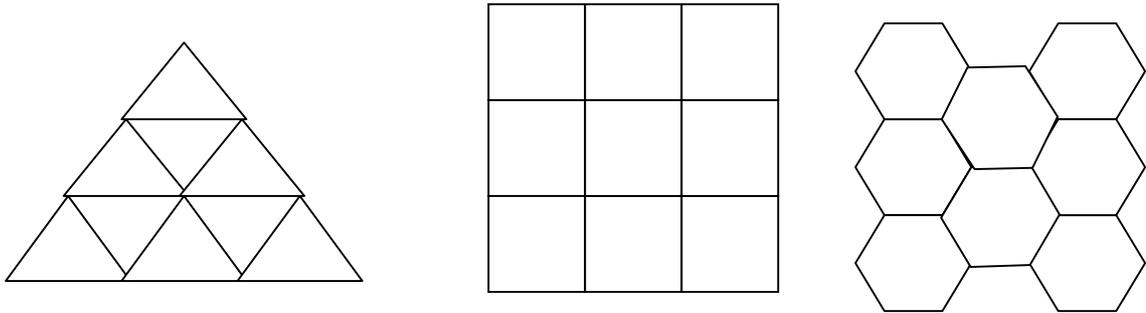


Рис. 1. Три вида симметричных многоугольников, покрывающих без зазора площадь плоскости

Вместе с тем, только правильный шестиугольник покрывает наибольшую площадь. Т.е., если сравнить площади равностороннего треугольника, квадрата и правильного шестиугольника с площадью описанного круга, то мы получим следующий ряд:

$$S_3 < S_4 < S_6 < S_n \quad (1)$$

$$\text{где: } S_3 = R^2 \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad S_4 = R^2 \cdot 2, \quad S_6 = R^2 \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad S_n = p R^2,$$

R – радиус описанного круга,
или: $(1,299 R^2 < 2 R^2 < 2,598 R^2 < 3,1415 R^2)$.

Правда, правильный шестиугольник обладает «недостатком» в сравнении с равносторонним треугольником, квадратом и, даже, правильным пятиугольником. В отличие от перечисленных фигур, правильный шестиугольник не может быть использован в создании объемного тела. Получается, что правильный шестиугольник – идеальная фигура на плоскости. Но плоскость образуется на границе раздела двух сред: теплый и холодный фронт, жидкий и газообразный и т.п. Но почему правильный шестиугольник является оптимальной фигурой на плоскости раздела двух сред? Почему другие правильные многоугольники не обладают формообразующей силой на плоскости?

2. Соприкасающиеся окружности на плоскости.

Чтобы ответить на второй вопрос предыдущего параграфа, рассмотрим соотношение размеров соседних фигур на плоскости, а именно – соотношение диаметров (радиусов) соприкасающихся окружностей.

2.1. Плотная упаковка окружностей относительно заданной на плоскости.

Рассмотрим случаи касания выделенного круга, радиусом равным R , тремя, четырьмя, пятью, шестью, семью и др. количеством окружностей. Т.е., заведомо, исследуем плотную упаковку окружностей на плоскости, относительно заданной (выделенной) окружности. По сути, данная задача сводится к задаче деления окружности на n равных частей, построению правильного вписанного многоугольника и нахождению подобного правильного многоугольника по принципу $b_n = 2R_n$ (пояснения ниже по тексту), в вершинах которого располагаются центры соприкасающихся друг с другом окружностей радиуса R_n .

Пусть имеется окружность радиуса R . Например, необходимо расположить три другие окружности радиуса R_3 , таким образом, чтобы они касались друг друга и соприкасались с окружностью радиуса R . Имеется только одна возможность такого рода расположения указанных фигур. На рис. 2 демонстрируется такое расположение окружностей.

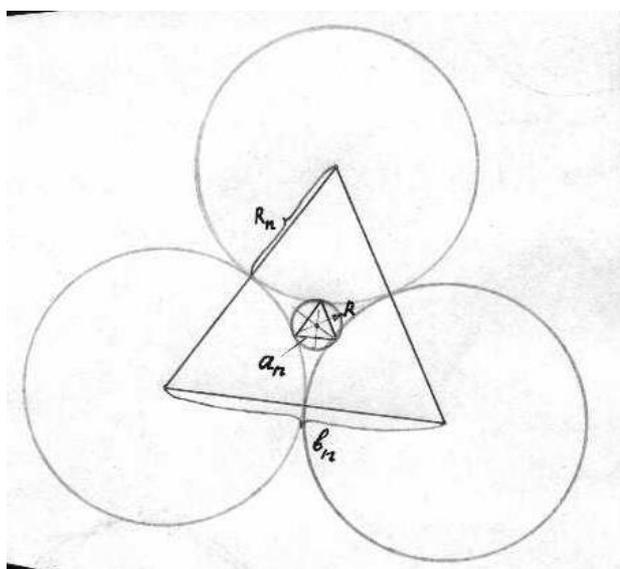


Рис. 2. Соприкасающиеся окружности при $n = 3$.

Обозначим сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R , через a_n , а сторону подобного треугольника (внешнего по отношению к рассматриваемому), образованного линиями, соединяющими центры соприкасающихся внешних окружностей, через b_n . Запишем в общем виде для вписанного в окружность n -угольного правильного многоугольника отношение :

$$\frac{a_n}{R} = \frac{b_n}{R + R_n}, \quad (2)$$

и т.к. сторона правильного вписанного в окружность n -угольника равна:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad (3)$$

то из него образуем и обозначим через a_n следующее отношение:

$$\frac{a_n}{2R} = \sin \frac{p}{n} = a_n \quad (4)$$

где n – число внешних окружностей, касающихся друг друга и внутренней окружности.

Учитывая, что $b_n = 2R_n$ для условия касания окружностей, получим из выражения (2) отношение стороны правильного, вписанного в окружность, n -угольника к радиусу выделенного внутреннего круга:

$$\frac{a_n}{R} = \frac{b_n}{R + R_n} = \frac{2R_n}{R + R_n} \quad (5)$$

Приводя полученное выражение к виду (4), получим окончательно:

$$\frac{a_n}{2R} = \frac{R_n}{R + R_n} = \sin \frac{p}{n} = a_n \quad (6).$$

Интересующее нас отношение радиуса одной из n внешних соприкасающихся окружностей к радиусу внутреннего круга $\frac{R_n}{R}$ выразим через a_n :

$$\frac{R_n}{R} = \frac{a_n}{1 - a_n} = \frac{\sin \frac{p}{n}}{1 - \sin \frac{p}{n}} = \frac{1}{\csc \frac{p}{n} - 1}, \quad (7)$$

Числитель и знаменатель формулы (7) можно представить следующим образом:

$$a = \frac{R_n}{R_n + R} \quad (8),$$

$$1 - a = \frac{R}{R_n + R} \quad (9)$$

Приравнивая выражение (6) выражению (8) получим формулу для стороны a_n выпуклого правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса R , через соотношение радиуса внутренней R и радиусов R_n внешних соприкасающихся окружностей:

$$\frac{a_n}{2R} = \frac{R_n}{R_n + R} \quad (10), \quad a_n = \frac{2RR_n}{R_n + R} = \frac{2}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_n}} \quad (11).$$

Из формулы (10) видно, что длина стороны выпуклого, вписанного во внутреннюю окружность, правильного n – угольника есть среднее гармоническое внутреннего и внешнего радиусов соприкасающихся окружностей.

Примечание 1: Если обозначить через $q = \sqrt{RR_n}$ – среднее геометрическое, а через $p = \frac{R + R_n}{2}$ – среднее арифметическое, то для среднего гармонического найдем следующее выражение:

$$G = \frac{q^2}{p} \quad (12)$$

и $q = \sqrt{pG} \quad (13),$

что справедливо для двух усредняющихся величин.

2.2. Функциональная зависимость отношения $\frac{R_n}{R}$ от количества соприкасающихся окружностей n .

Выражение (7) представим в виде:

$$f(n) = \frac{R_n}{R} = \frac{a_n(n)}{1 - a_n(n)} = \sin \frac{p}{n} (1 - \sin \frac{p}{n})^{-1} \quad (14)$$

Расчитанные значения функции $f(n)$ и ее аргумент n сведены в таблицу:

Таблица 1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
$a_n(n)$	0	1	0,87	0,71	0,59	0,50	0,43	0,38	0,34	0,31	0,21	0,16	0,10	0,08
$1 - a_n(n)$	1	0	0,13	0,29	0,41	0,50	0,57	0,62	0,66	0,69	0,79	0,84	0,90	0,92
$f(n)$	0	∞	6,46	2,41	1,43	1,00	0,75	0,62	0,52	0,45	0,27	0,19	0,11	0,09

График зависимости $f(n)$ от n представлен на рис.3.

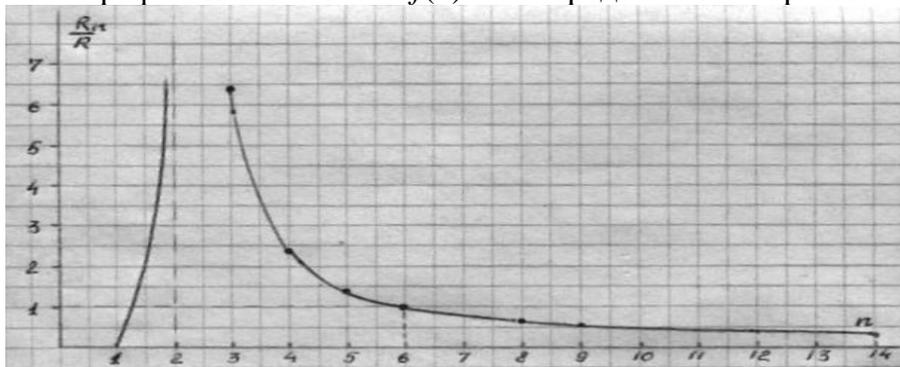


Рис.3. График зависимости $f(n)$ от n .

Из графика и значений функции $f(n)$ видно, что отношение R_n/R представляет собой отношение частей единичного отрезка: a_n и $1-a_n$:

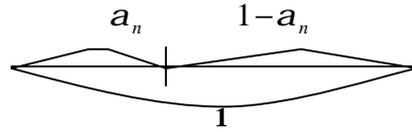


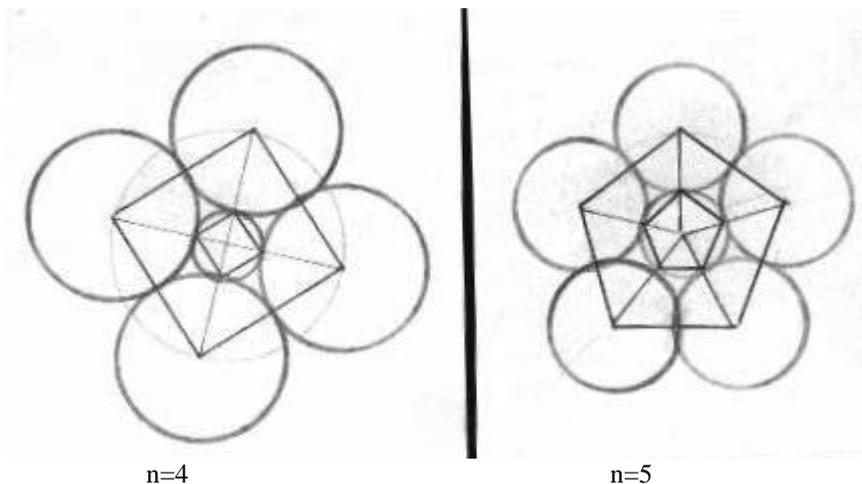
Рис. 4. Деление единичного отрезка на неравные части – смысл функциональной зависимости $f(n)$.

Функция $f(n)$ принимает значение, равное $\frac{R_n}{R} = 1$ при $a_n = \sin \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}$ и числе

$n = 6$. Таким образом, только при равных радиусах внутренней и внешних плотно соприкасающихся окружностей количество внешних соприкасающихся окружностей равно **6**.

Следовательно, покрыть плоскость плотно упакованными окружностями можно только в том случае, если их диаметры равны. И только в этом случае число окружностей, соприкасающихся между собой и каждая – с окружностью, находящейся в центре, строго равно шести. Для **$n=5$** и **$n=8$** единичный отрезок (рис.4) делится (приблизительно, см. Табл.1) в отношении золотого сечения $\frac{R_8}{R} \approx \frac{R}{R_5} \approx 0,6$. Таким образом, число 5 символизирует преимущественный рост, а число 8 – преимущественную деградацию, деление, размножение и т.п.

Для наглядного примера приведем рисунок для четырех, пяти, шести, семи и восьми окружностей.



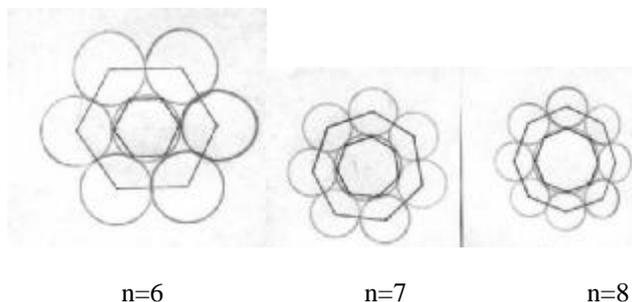


Рис. 4. Плотная упаковка окружностей относительно заданной (неизменной) окружности.

Примечание 2.

- 1) Угловое число: $180 = 2^2 3^2 5$ – число четное и составное, относящееся к классу четных составных чисел.⁶ Поэтому оно не делится нацело на простые и составные из простых сомножителей числа. По-видимому, и для числа n существуют среди целых чисел – числа предпочтительные: 3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 45; 60; 90; 180. Этим 16 числам соответствуют как *целое количество соприкасающихся окружностей*, так и *целое угловое деление* внутренней окружности на n частей: от 60^0 до 1^0 .
 - 2) Вокруг одной окружности можно расположить в плотной упаковке только целое количество соприкасающихся окружностей.
 - 3) Пункты 1) и 2) данного примечания свидетельствуют о квантованности всей системы соприкасающихся окружностей.
 - 4) Глядя на рисунок 4 (см. также рис.2) видно, что случаи с $n=3$, $n=4$, $n=5$ символизируют развитие, рост, эволюцию в живой природе: центральная окружность в диаметре значительно меньше ее окружающих соприкасающихся окружностей. Случай с $n=6$ характеризует **стабильность**, неразрушимость, неподвижность и т. п., структурную симметрию и «независимость» от времени в неживой (костной) материи. Для $n=8$, $n=9$,... $n=20$ и т.д. характерно уменьшение диаметров соприкасающихся окружностей, в сравнении с центральной окружностью: размножение, деградация, распад и т. п. Причем для $n=5$ – **рост** в «золотом отношении», а при $n=8$ – **деградация** в «золотом отношении».
- 3. Эволюция плотнейшей упаковки окружностей для $n=6$ в правильные шестигранные многоугольники.**

3.1. Реализация шестигранных ячеек в природе.

В предыдущем разделе мы показали, что случай упаковки с шестью окружностями равного диаметра с заданной является предпочтительным (и единственным). Окружностями равного диаметра можно заполнить площадь неограниченной плоскости. При этом каждые три соприкасающиеся окружности образуют незаполненные зазоры в виде

⁶ А.В. Баяндин. Структура и морфология натурального ряда чисел. С-Пб., 2000, «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». Сборник тезисов и материалов конгресса – 2000., стр.67

треугольных луночек с вогнутыми гранями. А каждая окружность, в отдельности, касается с шестью другими в точках, лежащих на прямой, соединяющей центры соприкасающихся окружностей. В результате, общее число треугольных луночек тоже равно шести. Наша задача в том, чтобы наглядно продемонстрировать механизм перехода от соприкасающихся окружностей к соприкасающимся без зазоров шестигранным многоугольникам.

Представим себе плоскость раздела двух сред с разным градиентом температуры. Наша плоскость изначально состоит из тонких одинаковых материальных окружностей, плотно соприкасающихся друг с другом. Окружности, заведомо, эластичные, т.е. имеющие бесконечное число степеней свободы расширения в плоскости, за исключением точек касания. В качестве природного феномена перехода нашей абстрактной системы в упорядоченное состояние плотно соприкасающихся шестигранников приведем пример диссипативной структуры, удаленной от термодинамического равновесия и существующей во внешних потоках энергии, информации и вещества. Такой диссипативной структурой может служить тонкий слой жидкости (силиконового масла), заключенный между двумя параллельными пластинами без воздушного зазора, медленно нагреваемый снизу (пластинка Рэлея – Бернара). При небольших градиентах температуры вязкая жидкость макроскопически неподвижна и находится в состоянии локального термодинамического равновесия. Подводимое извне тепло отводится посредством диффузии. При больших градиентах температуры система отклоняется от равновесия и появляется новый механизм теплопереноса – конвекция нагреваемой снизу жидкости. Масло поднимается вверх в центрах ячеек, радиально расходится, создавая центробежные силы давления, по поверхности слоя к их периферии и затем по стенкам ячеек стекает вниз.⁷ Так образуются так называемые шестиугольные конвективные ячейки Бенара, представленные на рис.5.



рис.5 Шестиугольные конвективные ячейки Бенара в силиконовом масле на равномерно нагретой медной пластинке.

⁷ Дж. Кальоти. От восприятия к мысли. М.«МИР». 1998, стр. 30

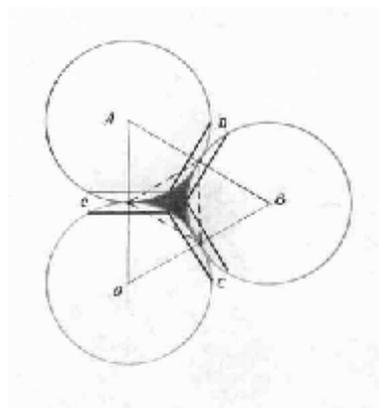
Эта новая динамически упорядоченная структура возникает и существует за счет подводимой извне тепловой энергии, часть которой преобразуется в кинетическую энергию макроскопически упорядоченных струй жидкости. Устойчивое струйное течение жидкости, невозможное в изолированной системе, поддерживается балансом потоков подводимого и рассеиваемого тепла, вследствие чего сохраняются температурный градиент и скорость течения, установившиеся в системе струй.

Процесс, аналогичный самоорганизации конвективного движения жидкости, определяемого обратным градиентом температуры в пластинке Рэлея – Бенара, происходит при движении дыма и теплого воздуха в дымоходах. Таким же образом можно объяснить кольцеобразное распределение тумана, имеющего тенденцию концентрироваться по периферии больших городов. Или эффект стоящих на столе зажженных свечей, способных разогнать дым курящих и очистить атмосферу комнаты.

Вернемся теперь к нашей абстрактной схеме образования правильных шестигранных многоугольников. Радиальные силы, направленные из центра каждой окружности к ее периметру, формируют из окружностей – правильные шестигранные многоугольники. Разберемся, как и каким образом исчезают зазоры в виде треугольных луночек между каждыми соприкасающимися тремя окружностями.

3.2. Зазоры в виде треугольных луночек между соприкасающимися окружностями.

Изначально исходим из представления о действии радиальных сил, направленных из центра каждой окружности к периферии - ее периметру. Фрагмент касания трех окружностей друг друга с образованием треугольной луночки ΔCDE и треугольника радиальных сил ΔABO представим на рис. 6. Очевидно, что компенсация радиальных сил соприкасающихся окружностей будет происходить на «эквипотенциальных» линиях, являющихся в треугольнике ΔABO перпендикулярами: BC , AE , OD . Так как в любом треугольнике перпендикуляры, опущенные из вершины на противоположную сторону, пересекаются в одной точке, то в нашем случае – эта точка является геометрической точкой равновесия центральных сил. По этим линиям, в направлении геометрического центра луночки развивается деформация окружностей. В результате, из окружностей формируются шестиугольные фигуры. Здесь необходимо выяснить, в каком соотношении находятся



площади сегментов окружностей (S_1 в ΔCDE , рис.7) и площадь самой луночки (S_3 на рис.7).

1) В случае с $n=6$ площадь одного сектора окружности равна:

$$S_6 = \frac{pR^2}{6}, \quad (14)$$

2) Площадь треугольника ΔCOE (рис.6):

Рис.6. Фрагмент касания трех окружностей.

$$S_{\Delta OCE} = OF \cdot R \cdot \frac{1}{2}, \quad (15),$$

$$\text{Где } OF = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = R \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}, \quad (16),$$

Тогда из (15) имеем:

$$S_{\Delta OCE} = S_{\Delta CDE} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4}, \quad (17),$$

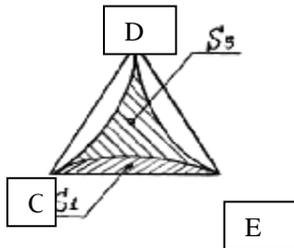
3) Искомую площадь сегмента S_1 найдем как разность площади сектора S_6 и площади треугольника $S_{\Delta OCE}$:

Рис.6. Фрагмент касания трех окружностей.

$$S_1 = S_6 - S_{\Delta OCE} = \frac{pR^2}{6} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12} (2p - 3\sqrt{3}) = \frac{pR^2}{6} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \quad (18).$$

4) Как видно из рис.7, в треугольнике ΔCDE имеется три сегмента площадью S_1 . Обозначим суммарную площадь трех сегментов через S_2 , тогда:

рис. 7. Луночка в треугольнике ΔCDE .



$$S_2 = 3S_1 = \frac{R^2}{4} (2p - 3\sqrt{3}) = \frac{pR^2}{2} \left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2p} \right), \quad (19).$$

5) Площадь луночки S_3 треугольника ΔCDE найдем как разность площади треугольника $S_{\Delta CDE}$ и суммарной площади трех сегментов S_2 :

$$S_3 = S_{\Delta CDE} - S_2 =$$

$$= \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{4} (2p - 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{4} (\sqrt{3} - 2p + 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{2} (2\sqrt{3} - p), \quad (20).$$

6) Выразим площади луночки и сегментов через числовые коэффициенты и сравним их между собой:

$$S_2 = 3S_1 = 0,271758R^2; \quad S_3 = S_{\Delta CDE} - S_2 = 0,161254R^2; \quad \frac{S_2}{S_3} = 1,685279 \quad (21),$$

Из (21) видно, что суммарная площадь трех сегментов S_2 треугольника $S_{\Delta CDE}$ больше ~в 1,68 раза площади луночки S_3 .

7) В связи с тем, что при формировании правильных шестигранных фигур радиальными силами давления, луночки полностью заполняются материей окружностей, возникает вопрос: “Куда девается избыточная материя сегментов окружностей?”. Остается предположить, что «лишняя» материя сегментов расходуется на утолщение стенок образуемых шестигранников, либо - на создание прослойки между гранями. Рассмотрим оба случая.

7.1.) Толщина стенок шестигранных ячеек:

а) избыточная площадь:

$$\Delta S = S_2 - S_3 = 0,271758R^2 - 0,161254R^2 = 0,110503R^2, \quad (22)$$

б) длина соприкасающихся стенок:

$$L_c = \frac{R}{2} \cdot 6 = 3R, \quad (23),$$

в) толщина стенки каждой грани:

$$d_c = \frac{\Delta S}{L} = \frac{S_2 - S_3}{L} = \frac{0,110503R^2}{3R} = 0,036834R \quad (24)$$

7.2.) Толщина прослойки между гранями:

Очевидно, что прослойка в два раза толще одной стенки шестигранной ячейки.

а) длина прослойки

$$L_p = \frac{R}{2} \cdot 3 = 1,5R, \quad (25),$$

б) толщина материальной прослойки между гранями:

$$d_p = \frac{\Delta S}{L_p} = \frac{0,110503R^2}{1,5R} = 0,073668R, \quad (26).$$

На рисунке 8 представлен фрагмент заполнения плоскости шестиугольными фигурами, стенки которых имеют утолщения, в соответствии с приведенными выше соображениями. Утолщения стенок показаны на рисунке в виде нечетких линий.

Примечание 3.

Проведенный анализ позволяет сейчас уяснить нам распределение центральных сил напряжения.

Во-первых, в рассмотренном выше случае деформации окружностей, мы получили вписанные в заданные окружности шестиугольники. То есть этот случай соответствует сдвиговой деформации (действие упругих внешних сил напряжения от периметра всей фигуры к ее геометрическому центру компенсируется упругими центральными силами из центра каждой окружности) с уменьшением расстояния между центрами исходных окружностей ~в $\sqrt{3}$ раз, без учета толщины стенок. Этот случай соответствует жесткому и непластичному материалу предполагаемых материальных окружностей.

Во-вторых, в случае пластичного материала окружностей и действия только центральных радиальных сил из центра каждой окружности, мы получим описанные шестиугольники. Расстояние между центрами этих шестиугольников в точности соответствует $2R$, т.е. – расстоянию между центрами исходных окружностей. Причем, радиус описанной окружности возрастает в точности в $\frac{2}{\sqrt{3}}$ раз, что соответствует расстоянию от центра

каждой исходной окружности до геометрического центра луночки, а именно: $L = R \frac{2}{\sqrt{3}}$.

В-третьих, в обоих случаях силы, компенсирующие напряжения в вершинах шестиугольников, больше, чем силы – на их гранях (в соответствии векторами расстояний). Необходимо отметить также, что в вершинах шестиугольников происходит компенсация трех упругих сил, а на гранях – всего лишь двух. Соответственно, и степеней свободы у точек вершин больше, чем у материальных точек на гранях. Последнее замечание нам понадобится при наблюдении роста снежинок и образования их лучей.

Аналогичные структуры мы наблюдаем в природе, а именно: пчелиные соты, блики отражений света в оптических приборах, в строении органических плодов флоры (семена граната, подсолнуха) и фауны (фасеточное строение глаз насекомых) и т.п., а также – в искусственно формируемых человеком приборах, в нанесении шестиугольных шероховатостей на поверхности изделий с целью уменьшения трения, в упоминавшемся уже случае с ячейками Бенара.

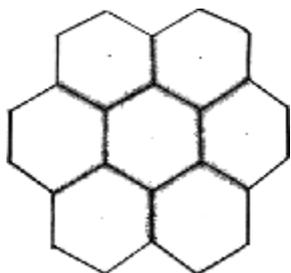


Рис.8. Фрагмент шестигранных ячеек, возникающих из плотно упакованных окружностей (материальных кругов) под действием центральной радиальной силы давления на периметр всей фигуры, либо – действия центральных радиальных сил из центров окружностей (тогда исчезнут утолщения стенок).

4. Анализ вида формулы: зависимости количества соприкасающихся окружностей от значения их радиуса.

При рассмотрении образования шестиугольных фигур на плоскости мы априори полагали, что внутренняя окружность («зародыш»), к которой плотно касаются внешние, является инвариантом. То есть, все изменения: количество окружностей, их диаметр – происходит на фоне неизменного диаметра внутренней окружности. Используя это положение, примем радиус внутренней окружности равным 1. Другими словами – в качестве внутренней окружности возьмем окружность единичного радиуса.

В соответствии с принятым условием, перепишем формулу (14), а именно:

$$f(n) = \frac{R_n}{R} = \frac{a_n(n)}{1 - a_n(n)} = \sin \frac{p}{n} (1 - \sin \frac{p}{n})^{-1} \quad \text{для } R=1 \text{ в следующем}$$

виде:

$$R_n \cdot \left(\frac{1}{a_n(n)} - 1 \right) = \text{const} = I \quad (27).$$

В результате незначительных преобразований (чисто математических) мы пришли к форме выражения в виде обратной связи (обратной зависимости) двух переменных величин: R_n и n . Если величина n **символизирует** количество, то величина R_n – качество, а именно – размер окружности. Таким образом, преобразованная формула наглядно демонстрирует количественно – качественную зависимость числа окружностей от их размера. Символически, формулу (27) можно представить в следующем виде:

$$a(L) \times \Omega(N) = \text{const} \quad (28),$$

где $a(L)$ – метрическая переменная, характеризующая изменение формы (длины);

$\Omega(N)$ – числовая переменная, определяющая вариации количества.

Таким образом, можно сделать вывод, что в описанном нами случае форма (размер окружности) находится в обратно пропорциональной зависимости от количества соприкасающихся окружностей.

Создается такое впечатление, что описанная нами система представляет собой единое целое, структуру которой в динамике можно разделить на множество из n частей. Причем, чем большее количество частей содержит это целое, тем меньше размер этих частей, составляющих единое целое.

Форма уравнения (28) соответствует форме обобщенного закона сохранения заряда⁸. Взаимодействие количества и качества (формы элементов целого и их количества) в нашем случае осуществляется по принципу обратной связи, общему для процессов взаимного влияния (взаимодействия) материальных тел и полей различной природы. А взаимодействие, по Энгельсу, есть конечная причина всего существующего, за которой нет других более фундаментальных определяющих свойств. Открытие закономерности распределения простых и составных чисел по закону обратной связи в теории чисел⁹ – основе математики, подтверждает всеобщность принципа обратной связи.

5. Некоторые аспекты использования выведенных соотношений.

5.1. Целое и части.

⁸ А.В. Баяндин. Фундаментальные взаимодействия в природе и принцип обратной связи. С-Пб., 2000, «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». Сборник тезисов и материалов конгресса – 2000., стр.67

⁹ А.В. Баяндин. К распределению простых чисел в натуральном ряду чисел. Новосибирск. «НАУКА», СИФ РАН. 1999, стр.17.

В этом подразделе мы хотели бы кратко охарактеризовать отношение между собой таких философских категорий, как целое и части, в контексте идеологии настоящей работы.

Объект, рассматриваемый нами в данной работе, обладает целостной, устойчивой структурой. Соприкасающиеся между собой окружности связаны друг с другом причинно-следственными связями категорий качества и количества. По своим признакам наш объект является *системным объектом* с присущими ему характеристиками. Так, результат взаимодействия элементов в рамках целого (изменение диаметра окружностей) приводит к «системным эффектам», а именно: варьируется количество соприкасающихся окружностей. Общая структура объекта как целого строится из единичных элементов, т.е. налицо определенная иерархичность всей системы. Рассматриваемый объект имеет упорядоченную, по найденному выше закону, целостную структуру, представляющую собой единый сложный объект. Целое (фигура из n окружностей) по закону обратной связи $a(L) \times \Omega(N) = const$ взаимодействует со своими частями (соприкасающимися окружностями) посредством изменения их количества и размеров (окружностей и фигуры в целом).

Найденная закономерность демонстрирует переход от простого к сложному и наоборот путем дискретного изменения сложности фигуры объекта как целого.

Функциональная зависимость числа соприкасающихся окружностей и их радиуса носит *нелинейный* характер (см. рис. 3) с характерной точкой разрыва при $n = 2$ (невозможность плотного расположения окружностей с $n < 3$ вокруг инвариантной окружности). Организация структуры нашего объекта носит явный нелинейный характер. Квантованность структуры (дискретное изменение числа окружностей) объекта находится в нелинейной взаимосвязи со значением диаметра (радиуса) каждой окружности и фигуры объекта в целом. Наличие в объекте исследования ярко выраженной нелинейной обратной связи позволяет говорить о нем, как синергетическом объекте организации. Сведение целого к частям и их взаимодействию, выразившееся в принципах редукционизма, механицизма и элементаризма, уместное при идеализациях, проявляет свою ограниченность при переходе к описанию процессов самоорганизации. Здесь уместен принцип *подчинения*¹⁰, который в синергетике выражает механизм становления целого, **формирования целым своих частей**.

5.2. Дискретное и непрерывное.

5.2.1. Если целое и непрерывное делить на бесконечное количество частей, то через дробное и дискретное мы снова приходим к непрерывному и целому. На первый взгляд, в этом высказывании скрывается парадокс. Но всем известно, что чем меньше части деления (цена деления), тем на большее количество частей можно разделить целое. Пусть целое, это -

¹⁰ И. Пригожин, И. Стенгерс. Порядок из хаоса. «Эдиториал УРСС». М. 2000, стр.262.

единица (1), а цена деления – δx . Тогда можно записать для числа дискрет деления целого следующий предел:

$$n = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \rightarrow \infty \quad (29),$$

Но все мы со школы знаем, что «сколько ни старайся разрезать яблоко на части, размером с нуль, ничего не получится – яблоко останется нетронутым». Получается, что если целое разделить на бесконечное количество частей, то, при этом цена деления должна быть в точности равна $\delta x = 0$. А это уже полнейший абсурд! Поэтому, целое можно разделить только на конечное число частей. Бесконечное разбиение целого на части не существует в природе, т.к. при этом целое остается целым.

“Отдай все, что тебе принадлежит - поровну - всему человечеству, тогда ты ничего не потеряешь”. Другими словами, *просто никому ничего не достанется.*

Необходимое свойство бесконечности – это движение, развитие... Бесконечность не есть предел чего-либо, не есть какое-либо ограничение, а есть неперемное движение, неограниченный рост... Достаточным, окончательно определяющим, свойством бесконечности является периодичность, цикличность в виде расширяющейся спирали развития¹¹.

Теперь мы можем сказать, что в *конечном не может быть бесконечности*. Только нуль (ничто) бесконечен в конечном. С нулем, вообще, в математике «не все ясно». Так, существует множество примеров и допущений, из которых следуют, на первый взгляд, удивительные результаты. Приведем некоторые из общеизвестных:

$$0! = 1; X^0 = 1; \ln 1 = 0; C_m^n = 1 \text{ при } n=0. \quad (30).$$

И уж совсем удивительно:

$$\sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \dots \sqrt{0}}}} = 1 \quad (31),$$

Что следует из предела:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \sqrt{x}}}} = 1 \quad (32).$$

Как и в предыдущем пункте 5.1. мы видим, что имеет место процесс перехода количества в новое качество: стремление разделить конечное целое на как можно большее количество частей приводит, в конечном итоге, к самому целому. «Круг деления целого начинается и заканчивается целым».

5.2.2. Как мы уже убедились в п. 5.2.1. – дискретное и непрерывное, часть и целое (п. 5.2.) взаимосвязаны друг с другом, переходят друг в друга в предельных отношениях. Поэтому, используя выведенную в данной работе формулу для качественно-количественных изменений, п.4., (28):

¹¹ А.В. Баяндин. К распределению простых чисел в натуральном ряду чисел. «НАУКА», СИФ РАН. Новосибирск. 1999, стр.29.

$a(L) \times \Omega(N) = const$, проанализируем дискретность и непрерывность пространства и времени.

1) *Реальны ли пространство и время?*

Так уж устроен человек, точнее – его мышление, что во всем он сомневается, будь то – сама Природа и ее явления, либо – человек и его мысли. Мало того, то, что было сегодня для него «истиной в последней инстанции», завтра – становится сомнительным и даже – ложным. Всюду, куда бы он ни бросил свой задумчивый взгляд, он видит антиномии. Дихотомией пронизаны его мысли. Отражая окружающую действительность, и исторические научные знания о ней, человеческая мысль пытается познать мир и самого себя. Крайности, полюса, противоположности в суждениях, в парности категорий и т.д., основанные на уровне развития абстрактно-образного мышления и рецептивного восприятия, вынуждают нас принимать ту или иную точку зрения. Дедуктивно-индуктивные методы познания и способы построения научных теорий, дискретная логика суждений отражают на себе субъективные взгляды не только индивидуального ученого, но и общественного мироустройства на определенном историческом этапе развития цивилизации. И «вечным двигателем» научного прогресса в процессе познания выступают как природное любопытство человека, так и его способности сохранять и передавать добытые знания последующим поколениям, постоянно совершенствуя при этом средства познания. И только опыт, экспериментальная проверка положений теоретических знаний на более точных и эффективных приборах и оборудовании (искусственных органах чувств человека в запредельных для него областях и диапазонах чувствительности), адекватная реальности интерпретация полученных результатов, построение и корректировка теоретических и экспериментальных моделей и аналогов явлений – позволяют отделить «зерна от плевел». Подытожить сказанное лучше, чем сказал А.С. Пушкин, по-видимому, невозможно:

*«О сколько нам открытий чудных
Готовит просвещенья дух
И опыт – сын ошибок трудных,
И гений – парадоксов друг».*

Эволюция представлений о мире проходит в своем историческом развитии сходные по форме этапы, наполненные новым познавательным содержанием. И каждый виток спирали познания становится заметно короче в своем историческом развитии. Мы являемся свидетелями ускоряющегося научно-технического прогресса. Узловые точки – «скачки» спирали развития познания являются в то же время определенными этапами интеграции накопленных знаний, их систематизации, в отличие от предшествующего, более продолжительного, периода дифференциации и углубления знаний. Процесс познания в целом – антиэнтропийный процесс. И особенно заметно это становится на этапе интеграции выявленных знаний в различных областях естествознания на основе общих для них

Принципах, как естественнонаучных, так и более общих – методологических принципах. Систематизированное знание, имеющее на вооружении общий подход к решению задач и вопросов, из различных по характеру исследования процессов природы и человека, представляет собой уже единое информационное целое знание. А, как известно, энтропия бессильна в борьбе с единичными объектами, какой внутренней сложности они бы не были. Помимо этого, такой объект, если можно так назвать определенную систему знаний, энергетически и информационно выгодней и ценней, соответственно. Описанная схематично спираль развития познания напоминает рост и усложнение органических молекул, формирование тканей, органов и, в конечном итоге, живого организма.

Еще, исторически, совсем недавно, механистическая картина мира Лапласа казалась завершенной. Но уже в наше время мы являемся свидетелями расширения и углубления нашего познания о Природе. Общая теория относительности Эйнштейна и квантовая физика, каждая в отдельности, внесли свой вклад в разрушение механистических взглядов на окружающий мир, в формирование полевой, дуалистичной картины мира. Современная научная картина мира, сквозь призму синергетической парадигмы, требует к тому же и нелинейный стиль мышления. Подход к анализу явлений на основе стратегии: дифференциация – анализ – суперпозиция – синтез, сейчас не годится. Учет в физике явлений, возмущений и взаимосвязей второго, третьего порядка малости приводит к анализу нелинейных процессов, требующему соответствующий математический аппарат и логику мышления.

Примечание 4. Конечное можно разделить только на конечное, то есть невозможно конечное разделить на бесконечное. При этом при делении конечного нельзя отбрасывать части. Т.к. оставшаяся часть тоже есть целое, и только в совокупности с другими частями эта часть составляет единое целое. Минимальная часть материи, у которой еще сохраняются ее атрибуты: движение в пространстве-времени, это та малая часть материи, меньше которой уже нет и не может быть ни движения, ни пространства и времени. Минимальная часть пространства еще обладает свойством связи и взаимосвязи с другими такими же частями, дабы возможно было образовать целое. Связующим звеном микрокосма и макрокосма является скорость света. В макрокосмосе она является предельной скоростью материи. В микрокосмосе – она характеризует элементарный акт

движения в предельном элементе пространства: $c = \frac{l_{\text{мини}}}{T_{\text{мин}}} = w_{\text{макс}} R_{\text{мин}}$,

движение за один период. Минимальная часть пространства является верхним пределом частоты возбуждающегося поля пространства – времени, его предельным резонансным контуром возбуждения: $f = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

И т.к.: $c = \frac{1}{\sqrt{m_0 e_0}}$, а волновое сопротивление Вакуума

равно: $r = \sqrt{\frac{m_0}{e_0}} = 120p = m_0 c = c 4p 10^{-7}$ (ом). Тогда все пространство –

время представляет собой взаимосвязанную «электрическую» цепь с распределенными параметрами, где: L_p [Гн/м], C_p [Ф/м] – распределенные индуктивность и емкость длинной линии. Волновое сопротивление длинной линии с распределенными параметрами:

$$r_p = \sqrt{\frac{L_p}{C_p}} = L_p w_p = C_p w_p, \text{ где } w_p = 2\pi n_p \text{ [м/с]} \text{ – угловая скорость вращения.}$$

Очевидно, что для Вакуума: $C_p = e_0$ и $L_p = m_0$. Следовательно:

$$c = w_p = 2\pi n_p = \frac{1}{\sqrt{m_0 e_0}} = \frac{1}{\sqrt{L_p C_p}}, \text{ где } e_0 \text{ и } m_0 \text{ – диэлектрическая и}$$

магнитная проницаемость Вакуума, погонные емкость и индуктивность пространства – времени. Волновое сопротивление $r_p = \frac{1}{C_p w_p}$ [ОМ], где

$w_p \left[\frac{M}{c} = \Gamma \mathcal{U} \cdot m \right]$ – резонансная частота пространства времени, это

дипольный момент частоты (элементарная единица частоты вращения диполя пространства – времени). Так $\frac{dw_p}{dr} = w[\Gamma \mathcal{U}]$ – есть привычная для нас частота поля.

Скорость света **с** есть **предельная скорость распространения** (электромагнитных волн и фотонов) и **предельная скорость прецессии** вектора напряженности электрического поля в плоском двумерном пространстве минимальной длины волны. Как мы уже показали, возбуждение одного такого плоского домена Вакуума происходит со скоростью **с**, определяемой погонными индуктивностью ($L_p = m_0$) и емкостью ($C_p = e_0$) на единицу длины. Распространение электромагнитного кванта со скоростью света осуществляется посредством взаимной индукции плоских элементарных элементов пространства: контуров – доменов. Таким образом, при распространении, например, кванта электромагнитного поля его энергия распределяется поровну: $mc^2/2$ – внешнее движение (распространение в пространстве) и $mc^2/2$ – внутреннее движение (прецессия вектора напряженности электромагнитного поля). «Мерцание Вакуума» или, другими словами, хаотическое возникновение прецессии вектора напряженности электрического поля происходит за счет сторонних сил не электромагнитной природы. Вынуждающей внешней силой является упругая центральная сила плоского пространства, направленная в центр дырки – пустоты резонансного контура – элемента плоского двумерного пространства. Эта упругая сила пространства и есть сила гравитации¹². В

¹² А.В. Баяндин. Взаимосвязанное динамическое изменения квантов пространства – времени как новый физический принцип анализа физического Вакуума. Депонированное произведение. Свидетельство № 474 от 26.04.99г. РАО, «Сибкоопирайт».

состоянии «покоя», или - в невозбужденном состоянии, в двумерном элементе пространства сохраняется баланс энергии гравитации и энергии электромагнитного поля¹³:

$$E_{zp} = E_{э/м} \quad (\text{П 4.1})$$

$$\text{или } \frac{c^4}{g} r_{zp} = \frac{hc}{I_{э/м}} \quad (\text{П 4.2}),$$

Из П 4.2. путем несложных преобразований получим:

$$I_{zp} I_{э/м} = \frac{2pg\hbar}{c^3} = I_0^2 \quad (\text{П 4.3}),$$

что было показано также в работе¹⁴. Из выражения П 4.3. мы видим, что гравитационная и электромагнитная волны находятся в обратной связи друг с другом относительно «площади» элементарного домена пространства.

Так как домены – двумерные, т.е. плоские, то и поляризация их происходит в плоскости. А, следовательно, и свет распространяется прямолинейно. Предельная скорость распространения световых волн объясняется конечной скоростью возбуждения элементарного домена пространства. Изменение поляризации пространства гравитирующими массами сказывается на искривлении лучей света.

Для поляризации пространства не требуется переноса вещества, материи (источник электромагнитного поля в момент испускания фотона с импульсом в заданном направлении *мгновенно* поляризует плоскую гравитационную «дорожку» для прохождения этого кванта, при этом гравитационная поляризация играет роль мгновенной обратной связи с источником, т.к. в двумерном пространстве отсутствует время).

Для упрощения анализа, будем рассматривать одномерный вектор пространства (одну из трех возможных координат).

Пусть $a(t,l)$ - дискретность времени, пространства;

$\Omega(t,l)$ - непрерывность времени, пространства.

1) Для времени, обозначим:

$$a_t = \frac{\Delta t}{n_t}, \quad \Omega_t = \frac{n_t}{\Delta t}, \quad \text{где } n_t - \text{число дискрет времени (число}$$

минимальных промежутков времени в заданном интервале), а Δt – заданный интервал времени (единица измерения).

2) Для пространства:

$$a_l = \frac{\Delta l}{n_l}, \quad \Omega_l = \frac{n_l}{\Delta l}, \quad \text{где } n_l - \text{число дискрет пространства (число}$$

минимальных протяженностей пространства в заданном диапазоне длины), а Δl - заданная протяженность пространства (единица измерения пространства).

¹³ Там же.

¹⁴ А.В. Баяндин. Фундаментальные взаимодействия в природе и принцип обратной связи. Материалы конгресса «Фундаментальные проблемы естествознания и техники». Санкт-Петербург, Россия, 2000.

Из приведенных выше соображений следует, что чем больше число дискрет $n_{t,l}$ на единицу длины, либо времени, тем выше соответственно дискретность пространства и времени. Другими словами, чем меньше абсолютное значение $a_t = \frac{\Delta t}{n_t}$ и $a_l = \frac{\Delta l}{n_l}$, тем выше дискретность.

P.S. Заключительная часть данной работы, посвященная взаимосвязи красного смещения с расширением Вселенной и «старением» квантов пространства-времени, не завершена в настоящее время.

09.1998г.