НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЛИПСА

А.В. Баяндин

В этой небольшой работе мы остановимся на некоторых свойствах эллипса, слабо или совсем не освещаемых в современной математической литературе. Интересно, что все характерные параметры эллипса получаются из деления отрезка прямой на неравные части, как и в «золотом сечении». Интересно, что неравные части этого отрезка прямой соотносятся между собой как среднее геометрическое, среднее арифметическое и среднее гармоническое.

1. Прежде всего, определим само понятие «эллипс»:

Определение: а)Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек (на отрезке прямой), называемых фокусами, есть величина постоянная.[1]

б)Эллипсом называется кривая второго порядка, которая задается в некоторой декартовой системе координат уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллипса, а система координат, соответственно, канонической системой координат. Числа ***a*** и ***b*** называются большой и малой полуосями эллипса.

Представим графически эллипс с его характерными точками, см. рис. 1:

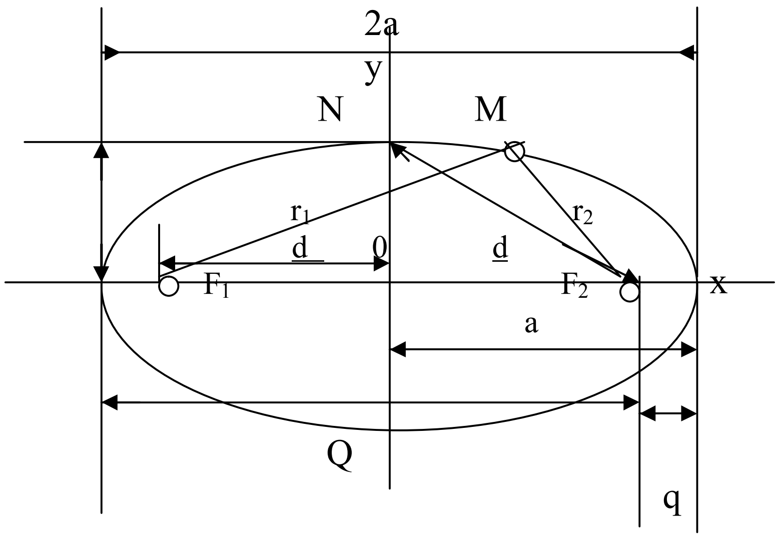

рис.1

Большая ось эллипса, длиной 2 а, расположена на оси абсцисс; точки F_1 и F_2 на ней - фокусы[2]. Малая ось эллипса - 2b проходит через ось ординат. Если из

[1] П.Ф. Фильчаков. Справочник по высшей математике. «Наукова Думка», Киев, 1972, стр.49.

вершины малой полуоси ***b*** (точки N) сделать радиусом ***a*** (большой полуоси) отметки на оси абсцисс, то получим расположение точек фокусов F_1 и F_2.

Если обозначить расстояние от центра (0) эллипса до точек F_1 и F_2 через d, то для прямоугольного треугольника ΔONF_2 можно записать выражение:

$$d^2 = a^2 - b^2 \qquad (2)$$

Величины $F_1M = r_1$ и $F_2M = r_2$ называются фокальными радиусами точки M. Величина отношения $\frac{d}{a}$ = e именуется эксцентриситетом эллипса. Расстояния до фокусов (d, 0) и (-d, 0) при $x \geq 0$ соответственно равны:

$$r_1(x) = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2(x) = \sqrt{(x+d)^2 + y^2}$$

Из уравнения эллипса (1) выразим y^2 и, учитывая, что $b^2=a^2-d^2$, получим для расстояний r_1 и r_2 следующие выражения:

$$r_1(x) = a + ex \qquad (3)$$
$$r_2(x) = a - ex \qquad (4),$$

где величина $e = \frac{d}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$, (5)

характеризует степень вытянутости эллипса и является его *эксцентриситетом.*

Сложив уравнения (3) и (4) , получим уравнение, характеризующее основное свойство эллипса:

$$r_1(x) + r_2(x) = 2a \qquad (6).$$

Сумма расстояний от фокусов эллипса до произвольной точки, принадлежащей контурной огибающей эллипса, постоянна для всех его точек.

2. Задачи, связанные с измерением параметров эллипса, вычислением эксцентриситета, имеют практическое значение в астрономии, астрофизике и других естественных науках. Согласно первому закону Кеплера каждая из планет движется не по окружности, а по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

---

[2] Фокус – focus, латинское слово, означающее очаг. Если в точке F_1 поместить источник света (и тепла), то после отражения от эллипса все лучи соберутся в точке F_2 и помещенное там воспламеняющееся вещество загорится.

Обозначим кратчайшее расстояние от точки, движущейся по эллипсу, до его ближайшего фокуса, как расстояние от одной из его вершин[3]:

$$q = r_{min} = a - d = a(1 - \frac{d}{a}) = a(1 - e) \qquad (7).$$

Наиболее удаленная от этого же фокуса точка – вторая вершина[4], для которой:

$$Q = r_{max} = a + d = a(1 + e) \qquad (8).$$

Прямая, соединяющая афелий и перигелий называется ***линия апсид***, длина которой равна Q + q = 2***a***.

Из отношения выражений (8) и (7) получим следующее соотношение:

$$\frac{Q}{q} = \frac{1+e}{1-e} \qquad (9),$$

а из их произведения, другое, очень любопытное соотношение:

$$Qq = a^2(1 - e^2) \qquad (10),$$

и используя (5):

$$Qq = a^2 - d^2 = b^2 \qquad (11),$$

И, следовательно, для b из (11) имеем:

$$b = \sqrt{Qq} \qquad (12).$$

Но, т.к. Q + q = 2a, то для ***a*** получим:

$$\boldsymbol{a} = \frac{Q+q}{2} \qquad (13).$$

Сравнивая (10) и (11) получим для b^2 следующее выражение:

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \qquad (14),$$

---

[3] Точка орбиты небесного тела (планеты, кометы, искусственного спутника и т.д.), обращающегося вокруг Солнца, в которой это тело находится ближе всего к Солнцу, называется *перигелием* (от сочетания греческих слов *περι* - около и *Hέλιος* – Солнце.

[4] Точка орбиты, наиболее удаленная от Солнца, называется *афелием* (греческое άφ от άπο –вдали). Свой перигелий Земля проходит в начале января, а афелий – в начале июля).

и обозначив $\frac{b}{a} = \varepsilon$ из (14) выведем выражение для ε:

$$\varepsilon = \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{Qq}}{(Q+q)/2} \qquad (15).$$

Тогда для эксцентриситета e имеем следующее выражение:

$$e = \sin\alpha = \frac{d}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{a-q}{(Q+q)/2} = \frac{\frac{Q+q}{2}-q}{(Q+q)/2} = \frac{Q-q}{Q+q} \quad (16),$$

где угол α – угол между сторонами ON и NF_2 треугольника ΔNOF_2 (см. рис.2).

Выражая d через Q и q , имеем:

$$d = \frac{Q-q}{2} \qquad (17).$$

На рис.1 выделим прямоугольный треугольник ΔNOF_2(см. рис.2.):

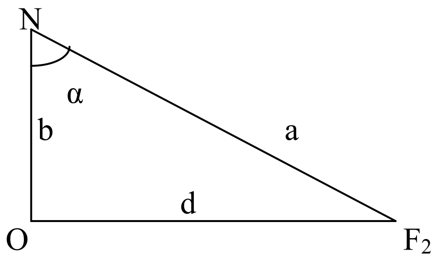

Рис.2

Очевидно, что в этом треугольнике:

$b^2 + d^2 = a^2$, или в нормированном виде $\frac{b^2}{a^2} + \frac{d^2}{a^2} = 1$ и т.к. b/a = cosα, d/a = sinα, то получим известное выражение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Таким образом, если отрезок прямой, длиной $l = 2a$, разделить (•) фокуса F на отрезки длиной Q и q, то:

1) среднее арифметическое полученных отрезков есть:

$$\frac{Q+q}{2} = a \qquad (18),$$

т.к. Q + q =2a. Т.е., среднее арифметическое этих отрезков есть середина их суммы;
2) перпендикуляр, восстановленный из середины суммарного отрезка, длиной 2a, есть среднее геометрическое отрезков q и Q (см. рис. 3.):

$$b = \sqrt{Qq} \qquad (19),$$

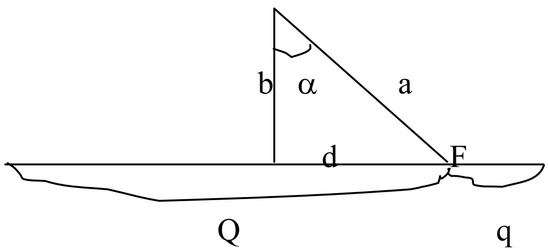

Рис. 3

3) величина отношения $\frac{b}{a} = \sin\alpha$ характеризует эллипсность окружности:

$$\frac{b}{a} = \varepsilon = \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{Qq}}{(Q+q)/2} \quad (20).$$

Эта величина является отношением среднего геометрического к среднему арифметическому величин отрезков прямой Q и q, полученных путем деления точкой фокуса F прямой l=2a.

4) величина отрезка d = ea:

$$d = ea = a - q = Q - a = \frac{Q-q}{2} \quad (21)$$

Эта величина, d = ea, характеризует расстояние от центра прямой l=2a до точки фокуса F (фокусное расстояние).

5) Величина отрезка ***εb***:

$$\boldsymbol{\varepsilon b} = \frac{qQ}{(q+Q)/2} = \frac{b^2}{a} = a(1-e^2) = \frac{2}{\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}} \qquad (22)$$

определяет длину отрезка от центра эллипса до мнимого фокуса $F^{`}$ (среднее эллипсное). Выражение (22) представляет собой среднее гармоническое.

<u>Предварительный вывод</u>: Характеристики эллипса полностью определятся параметрами – перигелием (q) и афелием (Q).

Рассмотрим ***пример***: Отрезок прямой, длиной *l=2a=17*(ед. изм.) разделен точкой фокуса F на неравные части Q=15 и q=2. Либо, что ближе к практике: “Заданы только перигелий (q) и афелий (Q) для произвольной планеты”. Найти эллипс.

Решение:

1) Большая полуось эллипса (среднее арифметическое)

$$a = \frac{Q+q}{2} = \frac{15+2}{2} = 8{,}5$$

2) Малая полуось эллипса (среднее геометрическое)

$$b = \sqrt{Qq} = 5{,}477$$

3) Эллипсность

$$\varepsilon = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{Qq}}{(Q+q)/2} = 0{,}644$$

4) Эксцентриситет

$$e = \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{Q-q}{Q+q} = 0{,}765$$

5) Фокусное расстояние

$$d = ea = \frac{Q-q}{2} = 6{,}5$$

6) Мнимое фокусное расстояние (среднее гармоническое)

$$\boldsymbol{\varepsilon b} = \frac{qQ}{(q+Q)/2} = \frac{b^2}{a} = 3{,}529$$

Вывод: 1) Характеристические параметры эллипса образуются величинами двух неравных между собой отрезков прямой.

2) Большая полуось эллипса - среднее арифметическое этих отрезков.

3) Малая полуось – среднее геометрическое.

4) Мнимое фокусное расстояние – среднее гармоническое.

3. ***Определение эллипса при помощи директрис.***

В общем случае, кривыми второго порядка на плоскости называют множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$ax^2 + 2bx + cy^2 + 2dx + 2dy + f = 0 \qquad (23)$$

где $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Определение кривой 2-ого порядка с помощью фокального свойства:

“Кривая 2-ого порядка есть геометрическое место точек, для которых отношение расстояний до заданной точки F (фокуса) и до заданной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная ***e*** (эксцентриситету).

При: ***e***<1 ~ эллипс;

e=1 ~ парабола;

e>1 ~ гипербола.

Директрисы – это прямые, параллельные малой оси и находящиеся на расстоянии ***h = a/e*** от нее. Для любой точки эллипса M(x,y) справедливо соотношение:

$$\frac{r_1}{h_1} = \frac{r_2}{h_2} = \boldsymbol{e} \qquad (24)$$

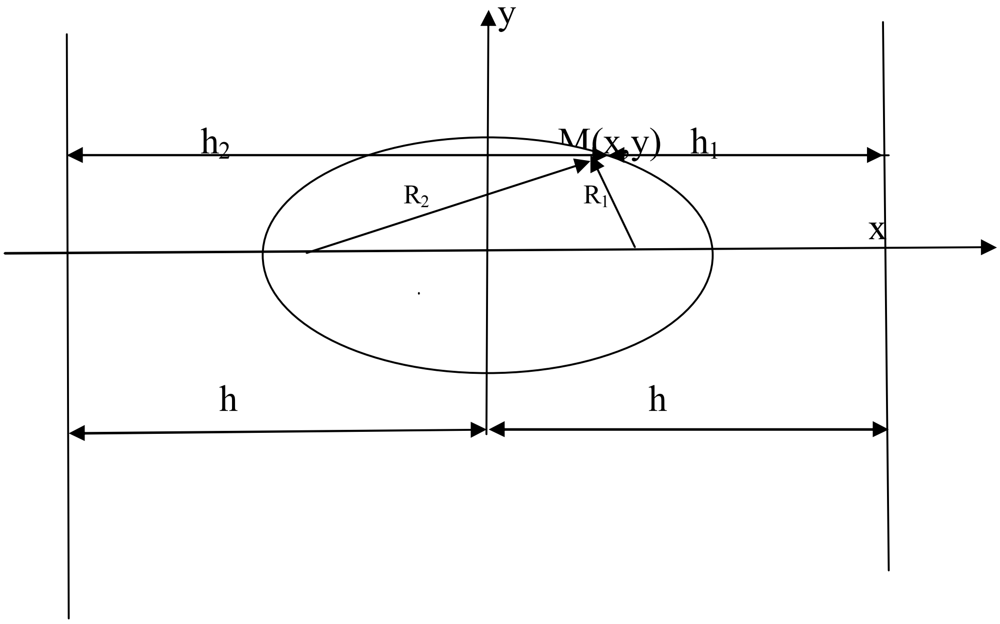

Рис. 4.

и
$$\frac{a - r_1}{x} = \frac{r_2 - a}{x} \qquad (25)$$

Очевидно, что т.к. $e = \frac{a}{h}$ и $e = \frac{d}{a}$, то из их равенства следует:

$$a = \sqrt{dh} \qquad (26)$$

и, заменяя в первом выражении ***a*** через $\boldsymbol{a} = \frac{d}{e}$, найдем ***d***

$$\boldsymbol{d} = e^2 h \qquad (27).$$

Представим основные параметры эллипса, схематично, в виде отрезка прямой, разделенной на неравные части ***a, Q, d, q, h=a/e*** и, перпендикуляра ***b*** в середине отрезка 2***a***.

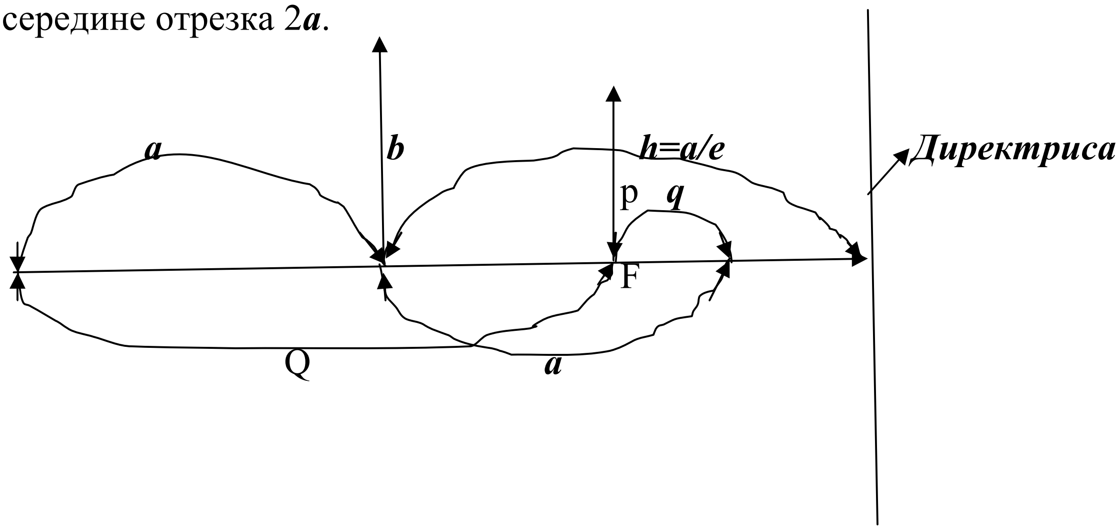

Рис.5.

Обозначим, для краткости, фокальный параметр (22) , как $\frac{b^2}{a} = \boldsymbol{p}$ (перпендикуляр в точку фокуса эллипса из точки его огибающей) и через

R = $\sqrt{ab}$ - среднее геометрическое значение малой и большой полуосей эллипса - как радиуса окружности.

Окончательно, суммируя итоги соотношений основных параметров эллипса (перигелий, афелий, директриса), подведем итоги.

1 Величины соответствующих отрезков прямой (q, a, Q) образуют арифметическую прогрессию:

$\frac{q+Q}{2} = a$ - среднее арифметическое;

$\frac{Q-q}{2}$= d = ea - фокусное расстояние эллипса;

d = a – q = Q – a = const - знаменатель арифметической прогрессии.

2 Совокупность величин соответствующих отрезков прямой (b, R, a), (q, b, Q), (d, a, h), (p, b, a) образуют геометрические прогрессии:

2.1. (b, R, a)

γ = $\frac{R}{b} = \frac{a}{R}$, R = $\sqrt{ab}$ - среднее арифметическое;

γ - знаменатель геометрической прогрессии.

2.2. (q, b, Q)

β = $\frac{b}{q} = \frac{Q}{b}$,   b = $\sqrt{qQ}$ - среднее геометрическое;

β – знаменатель прогрессии, β = $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$, где $\frac{b}{a} = \varepsilon = \sqrt{1-e^2} = \frac{\sqrt{Qq}}{(Q+q)/2}$

2.3. (d, a h)

$\varphi = \frac{a}{d} = \frac{h}{a} = \frac{1}{e}$ - знаменатель прогрессии;

a = $\sqrt{dh}$ - среднее геометрическое.

2.4. (p, b, a)

$\xi = \frac{b}{p} = \frac{a}{b} = \frac{1}{e}$ - знаменатель геометрической прогрессии;

b = $\sqrt{ap}$ - среднее геометрическое.

Из 2.2. и 2.4. имеем для b = $\sqrt{qQ} = \sqrt{ap}$, и, следовательно, p = $\frac{qQ}{a} = a\varepsilon^2 = a(1-e^2)$.

3 Совокупность величин отрезков прямой (q, Q, p) образуют гармоническую прогрессию, а величины, обратные данным величинам - арифметическую $(\frac{1}{q}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{p})$.

3.1. $(\frac{1}{q}, \frac{1}{Q}, \frac{1}{p})$

η = $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{Q} - \frac{1}{p}$ - знаменатель арифметической прогрессии (убывающей);

£ = $\frac{\frac{1}{q}+\frac{1}{Q}}{2}$ - среднее арифметическое;

3.2. (q, Q, p)

p = $\frac{b^2}{a} = \frac{2qQ}{Q+q}$ - среднее гармоническое;

μ = $\frac{Qp}{Q-p} = \frac{qp}{p-q}$ - знаменатель гармонической прогрессии.

1987г.