ЕГО ВЕЛИЧЕСТВО ЧИСЛО

А.В. Баяндин

1. Что есть число? Откуда оно родом? Что говорит нам и зачем?

Так много сразу возникает вопросов, когда задумываешься о смысле понятий. Видимо, самыми первыми понятиями человека, в процессе возникновения языка общения, были понятия самости: я, он, много, мало и т.п. Происхождение и укрепление данных понятий в речи человека стимулировало начало освоения азбуки счета предметов. Чувственные ощущения явились основой для создания счета. Числа и ритм, цикличность и период взяты человеком из наблюдений дискретности и повторяемости явлений и предметов окружающего мира. Напротив, непрерывность, гладкость и т.п., присущие многим предметам и явлениям окружающего мира, не требовали количественного описания. Для их отождествления достаточно было указать или представить словесно образ этих предметов. Неопределенность в понятиях много и мало заставляла человека совершать первые шаги творения, а именно, вводить понятие определенной количественной меры. Так появилось понятие числа. Даже и в наше время есть племена людей (индейцы), которые используют в практической жизни всего три числа:1, 2 и 3, обозначая, по-видимому, слова: я, ты и он.

Естественно, что стимуляцией счета выступают общественные отношения, развитие самого человеческого общества, как в духовном, так и в материальном плане. Десятичная позиционная система счисления, имеющая, видимо, «анатомическое» происхождение (количество пальцев на руках), демонстрирует нам определенность введения количественной меры и цикличность. Числа, сами по себе, статичны и «нагружены» только количественной информацией. Числа не принадлежат материальным предметам, они – плод фантазии, воображения, результат абстрагирования только одного свойства предмета исследования, его целостности, единства. Последнее и есть понятие единицы, одного, целого, неделимого. И вот из этих единиц, их множества, уже формируется количественная мера. Целые числа подчинены строгому иерархическому закону их строения. Числовой ряд натуральных чисел представляет собой бесконечное суммирование отдельных единиц, используя правило: каждое число ряда больше предыдущего на 1 и меньше последующего, тоже на 1(за исключением самой первой единицы). Окружающая природа демонстрировала человеку преходящий характер целостности: ничто не вечно под Луной. Человек видел и многочисленные разрушения, катаклизмы окружающей природы и, искусственных предметов быта и т.п. Это явилось для него следующим шагом в абстрагировании целостности: возможности деления целого на части. Так появилось понятие: все во всем. Если целые единицы складывались в числовом ряду в бесконечность, то и деление целых частей (единиц) математически приводило к бесконечности. Здесь человек впервые обнаружил аналогию бесконечности микрокосма и бесконечности макрокосма: Что внизу и снаружи подобно тому, что в глубине и вверху (вольное изложение высказывания древнеегипетского бога Тота – Гермеса Трисмегиста из его произведения «Изумрудные скрижали»). Подобие уже само по себе означает взаимосвязь, отражение свойств предметов, вещей друг в друг, подчинение низшего высшему и единому Закону гармонической иерархии.

Уйдя от неопределенности (много, мало) к явной определенности единичного, через понятие целого, человек через количественную меру снова пришел к неопределенности – бесконечно большому и бесконечно малому. Большое

(Вселенная) и малое (элементарные частицы) в физическом мире имеют границы, определяемые опытом, экспериментом. В абстракции, то есть в математике, такого нет. Здесь мы имеем то, что имеем: ни для сверхбольших, ни для сверхмалых чисел нет границ. Хотя и здравый смысл диктует человеку, что как в большом, так и в малом в природе есть свои пределы, диктуемые циклическими (периодическими)свойствами материи, но он не может это соотнести с неопределенностью бесконечно большого и бесконечно малого в числовом ряду. Не уж то нужно круг замкнуть? Не движемся ли мы в своем свободном счете к тому, что целым снова назовем? Слагая много раз между собою одни лишь целые, в конце концов придем к тому, с чего начали счет? Дробя на мелкие кусочки, от целого не оставляя ничего, мы вновь придем к единой мере, началу сущего всего: целое, единичное. И где бы мы не брали меру, какой бы облик ни был дан, от целого идти что вверх, что вниз – к нему же и придешь. Здесь вечный круг, спираль и в этом есть вся бесконечность! В чем смысл считать, не зная меры?

Прежде, чем двигаться дальше, рассмотрим понятие единичного, или конкретно – единицы. С этим понятием тесно связано понятие элемента. По Аристотелю, элементом называется последняя часть в пределах вещи, которая уже не делится на дальнейшие составные части, отличные от нее по виду. Этим именем обозначаются и последние части физических тел, и отдельные составные части геометрических чертежей и логических доказательств. В переносном смысле об элементах говорится в смысле малых (по содержанию) и простых начал, которые могут быть использованы для объяснения во многих случаях: поэтому элементами называются единица и точка, и точно так же это имя иногда дается родам, как наиболее общим определениям вещей[1]. И далее: «И заимствуя название элемента отсюда, дают его всему, что, будучи одним (по числу) и малым (по величине), в то же время пригодно для многого; поэтому элементом также называется малое, простое и неделимое. Отсюда и появился взгляд, что наиболее общие (вещи) представляют собою элементы, ибо каждая из них, будучи единою и простою, находится во многом – или во всем, или в возможно большем; а поэтому некоторые также считают началами единое и точку[2]».

Данное определение можно полностью принять, но с небольшой оговоркой. В пределах натурального ряда чисел определение для единицы подходит как нельзя лучше: она и самая простая и самая малая и неделимая. Но, расширяя понятие единичного с натурального ряда чисел на числа действительные, мы уже будем иметь делимую единицу. То есть, единица во множестве действительных чисел уже не самый простой и малый элемент, а является границей между целыми и действительными числами. Но так же, как и бесконечно большое состоит из бесконечного количества неделимых единиц, так и сама единица – то же состоит из бесконечного количества неделимых элементов. Подобие микро - и макромира, символично, можно представить в виде следующей схемы.

[1] Аристотель. Метафизика. Ростов на Дону, «Феникс», стр. 109.
[2] Там же, стр.110.

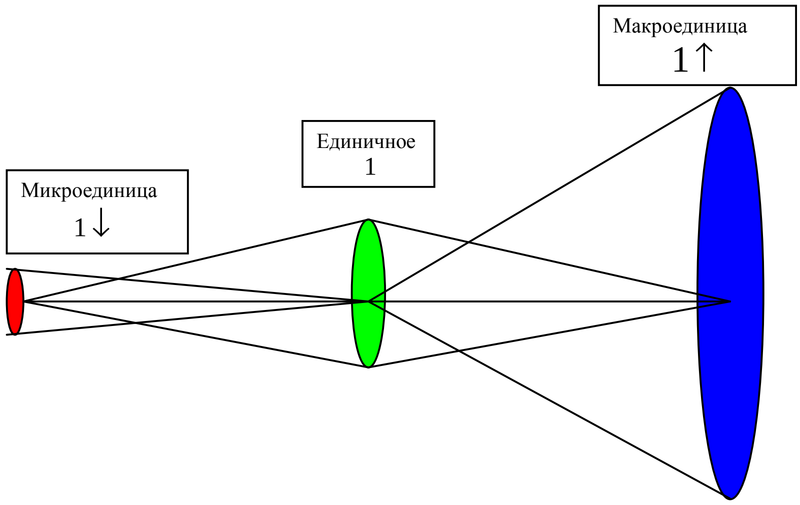

рис 1. Подобие микро - и макрокосма через «призму» единичного.

Как видно из рисунка, внешние границы микро – и макрокосма гармонично «сливаются» в единичном, в его внутреннем устройстве. В тоже время, единичное представлено во внутреннем устройстве микро – и макросистемы. Таким образом, единичное подобно как внутреннему устройству бесконечно большого, так и – бесконечно малого. А бесконечно большое и бесконечно малое – подобно внутреннему устройству единичного. То есть, бесконечно большое, как целое, подобно (равно) бесконечно малому, как целому. Следовательно, внутренне единство единичного (целого) сочетает в себе два противоположных качества: бесконечно большое и бесконечно малое. Поэтому, целостность и устойчивость единичного определяется гармонией двух противоположных начал: балансом бесконечно большого и бесконечно малого. Отсюда вновь напрашивается вывод: динамика, движение возможно при соблюдении баланса двух начал. На основе изложенного, сформулируем закон подобия:

$$\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{const} = 1 \qquad (1)$$

где **α –** единичное микромира; **ω –** единичное макромира.

P.S.Например, для нашей Вселенной должно быть справедливым следующее равенство:

$$\lambda_{min} \times \lambda_{max} = l_0^2 \qquad (2)$$

где $\lambda_{min} = 10^{-34}$(м), $\lambda_{max} = 10^{26}$(м) – теоретические минимальное и максимальное значения размеров материи в нашей Вселенной и $l_0^2 = 10^{-8}$(м^2).

Так как баланс микро и макро начал соответствует const = 1, а у нас:

$l_0 = 10^{-4}$*(м)*, что соответствует микроволновому реликтовому излучению, то расширение Вселенной продолжается и сейчас. Граница расширения Вселенной соответствует критической максимальной длине волны реликтового излучения: $l_0 = 2\,p\,R_0 = 1$ или $R_0 = \frac{1}{2p} = 0{,}159$ (м).

Количественные и качественные особенности чисел отмечал так же Ф. Энгельс: «Число есть чистейшее количественное определение, какое мы только знаем. Но оно полно качественных различий. …численность и единица, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Уже благодаря этому получаются, чего не подчеркнул Гегель, - качественные различия: простые числа и произведения, простые корни и степени. … Отдельное число получает некоторое качество уже в числовой системе и сообразно тому, какова эта система. …. Если мы возьмем степенное отношение, то здесь дело идет еще дальше: всякое число можно рассматривать как степень всякого другого числа – существует столько логарифмов, сколько имеется целых и дробных чисел[3].

Порой удивляешься, насколько похожи качественные отличия предметов окружающего мира на качественные различия чисел. Симметрия и асимметрия природных и искусственных предметов аналогична четным и нечетным числам. Четные числа демонстрируют в своей разложимости на две целые и равные части (для целых чисел) полную симметрию частей целого; нечетные числа нельзя представить в целых числах двумя равными половинками – асимметрия. Отрицательные числа показывают нам симметрию отражения: 5 и - 5; 127 и - 127. Нечетные числа бывают простыми и составными, то есть неразложимыми на простые множители и – состоящие из простых сомножителей. В предметах природы мы тоже наблюдаем вещи монолитные и однородные, композиционные и конструктивные вещи, состоящие из разных частей, материалов и пр. О числах Фибоначчи, числе π, числе e, их взаимосвязи с явлениями и сущностями в природе – написано так много, что не требует отсылать читателя к какой-либо конкретной литературе. Качественные характеристики чисел и их соотношений причудливо переплетается с аналогиями в музыке и литературе. Особенно ярко и системно изложено об этом в книге «Язык, музыка, математика» венгерскими математиком Б. Варгой, литератором Ю. Дименем и музыкантом Э. Лопариц[4].

Еще более удивительные аналогия и подобие встречаются в математических функциях и математическом аппарате, вообще. Описание различных по своему характеру природных процессов на языке современной математики принимает полностью идентичный характер. В этом «фундаментальном единстве» природы есть какой-то мистический смысл. Чтобы ориентироваться в современном мире физики, постичь общие свойства физического мира, достаточно глубоко изучить какую-нибудь область физических явлений, например, электростатику. И на это есть несколько причин.

Первая. Существуют великие принципы, применимые к любым явлениям, такие, как закон сохранения энергии и момента количества движения (принципы минимума: принцип наименьшего действия, принцип минимального времени и др. *А.Б.*). Глубокое понимание этих принципов позволяет сразу постичь очень многие вещи. *Вторая*. Оказывается, что многие сложные явления, как, например, сжатие твердых тел, в основном обусловливаются электрическими и квантовомеханическими силами, так, что, поняв основные законы электричества и квантовой механики, имеется возможность понять многие явления, возникающие в сложных условиях. *Третья*. Имеется замечательнейшее совпадение: *Уравнение для самых разных физических условий часто имеют в точности*

[3] Ф. Энгельс. Диалектика природы. М. Изд. «Политической литературы», 1987, стр. 224-225.
[4] Б.Варга, Ю. Димень, Э. Лопариц. Язык, музыка, математика. Изд. «Мир»,М., 1981, стр.247

одинаковый вид. Использованные символы, конечно, могут быть разными – вместо одной буквы стоит другая, но математическая форма уравнений одна и та же. Это значит, что изучив одну область, мы сразу получаем множество прямых и точных сведений о решениях уравнений для другой области[5].Научно - популярно, вся физика в аналогиях уравнений, представлена В.П. Ковтуном в книге «Занимательный мир физики»[6]. О масштабности[7], подобии[8], методе аналогий[9] написаны монографии, опубликовано множество статей и методических пособий[10] по самым разным вопросам естествознания, явлениям природы. Об эффективности математики в естественных науках , о ее парадоксальной эффективности, непостижимости и тайны эффективного использования этого абстрактного языка при описании явлений природы высказывались как физики, так и математики: Анри Пуанкаре[11], Морис Клайн[12], Герман Вейль[13], Альберт Эйнштейн[14], Вернер Гейзенберг[15], Поль Адриан Морис Дирак[16], Эрвин Шрёдингер[17], Пол Дэвис[18] и многие другие естествоиспытатели. Под одноименным названием «Непостижимая эффективность математики в естественных науках» был прочитан доклад Юджина Вигнера в 1959г. в Нью-Йоркском университете на Курантовских математических лекциях[19].

Другие авторы отмечают совпадение вновь обнаруженных констант, например, константы $k = 3{,}5$ для совершенно разных областей естествознания. Так, твердые материалы всегда распадаются (например при критической деформации, взрыве, трескании почвы при иссушении) на куски, области величины и размеры которых образуют иерархический ряд - геометрическую прогрессию со знаменателем близким к 3,5. То же самое соотношение было обнаружено и в распределении масс и размеров малых тел солнечной системы – астероидов и спутников. Почему материалы с различными физико-химическими свойствами ведут себя так сходно, причем независимо от масштаба явления? Надежных объяснений пока нет. Если рассматривать твердый материал как систему отдельных элементов, находящихся каждый в своем энергетическом состоянии – от стабильного до устойчивого, тогда можно приблизиться к пониманию причины. Когда происходит деформирование, то есть при поступлении энергии извне и взаимодействии элементов друг с другом, их свойства так же, как и свойства всей системы, будут изменяться. Эти изменения, приводящие к неустойчи-

---

[5] Р. Фенман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Изд. «МИР», М., 1977, Т. 5, стр. 236.
[6] В.П. Ковтун. Занимательный мир физики. Дельта. СПб, 1997, стр. 240.
[7] С.И. Сухонос. Масштабная гармония Вселенной.»София», М., 2000, стр. 310.
[8] С.Г. Федосин. Физика и философия подобия от преонов до метагалактик. Пермь, 1999, стр. 544.
[9] Д.В. Куликов, Н.В. Мекалова, М.М. Закриничная. Физическая природа разрушения. Уфа, 1999, стр. 330.
[10] В.В. Агафонов. «Метод аналогии в различных облстях знания». http://metodika.ru/?id=46
[11] А. Пуанкаре. О науке. М., «Наука»,1990, стр. 736
[12] М. Клайн. Математика, поиск истины. «МИР», М., 1988, стр. 296
[13] Г. Вейль. Математическое мышление. М,, «Наука», 1989, стр. 400.
[14] А. Эйнштейн. Эволюция физики.УМ, М.,2001, стр. 264
[15] В. Гейзенберг. Физика и философия. Часть и целое. М., «Наука», 1989, стр.400.
[16] П.А.М. Дирак. К созданию квантовой теории поля. М., «Наука», 1990, стр. 368.
[17] Э. Шредингер. Наука и гуманизм. РХД., Москва-Ижевск., 2001, стр. 62.
[18] П. Дэвис. Суперсила. М., «МИР», 1989, стр. 272.
[19] Е. Вигнер. Этюды о симметрии. М., «МИР», 1971, 318с.

вости системы, носят сходный характер для любых масштабов. Но в таком случае непонятно, откуда берется «первичный» масштаб… [20].

Такому же иерархическому закону, с коэффициентом, близким к 3,5 , подчиняются и временные события в геологической истории Земли. Ее эволюция, как известно, носила циклический характер. Глобальные длительные циклы, менявшие лик Земли, состояли из более коротких циклов, те, в свою очередь, из еще более кратковременных и т.д. Длительность и чередования некоторых исторических событий в Европе (войн, периодов царствований и т.д.) образуют одинаковые временные блоки, повторяющиеся на протяжении трех с лишним тысячелетий европейской истории примерно3,5 раза со сдвигом 333, 1053 и 1778 лет, то есть они в определенной степени перекрывают друг друга. И здесь мы видим удивительную аналогию чередования исторических событий с геологической историей Земли с коэффициентом прогрессии k = 3,5[21].

Для нелинейных эффектов при прохождении луча лазера через жидкие кристаллы найдены соотношения, аналогичные соотношению принципа неопределенности в квантовой механике. Аналогично, для геологии сформулирован свой принцип неопределенности, подобный тому, что Гейзенберг предложил для микромира[22]. Еще один удивительный пример аналогии числового ряда с объектами природы демонстрирует нам геология. Какая может быть разница между четными и нечетными числами? Вроде бы никакой. Между тем, если расположить в ряд все химические элементы в порядке возрастания их атомных номеров, то окажется, что элементы с четными порядковыми номерами слагают 87% массы земной коры, а с нечетными – только 13%... Если выстроить по «рангу» ряд рудных месторождений, то есть в порядке убывания в них запасов полезного ископаемого, будь то ртуть, медь, алюминий или другой металл, то окажется, что: произведение запасов месторождения на его порядковый номер в ранговом ряду – величина постоянная. Зная закон убывания, можно по известным залежам руды находить еще не открытые. Действительно, ученые научно – исследовательского института им. А.П. Карпинского, проведя математический анализ, установили, что по наиболее крупному месторождению региона (геологической провинции) можно судить обо всех месторождениях в его пределах и даже обо всех ресурсах данного вида сырья в изучаемом районе. Почему же природа так “математизировала” процесс накопления полезных ископаемых, в частности металлических руд? Пока на этот вопрос ответа нет[23].

Если математически выразить словесное выражение открытого закона убывания, то получим следующее выражение:

$$\boldsymbol{m_k \times k = const} \qquad (3),$$

где: m_k – *запасы полезных ископаемых в руде ранга* k;

k – *ранг месторождения , порядковый номер* (1, 2, 3…) *в порядке убывания в них запасов полезных ископаемых.*

---

[20] Техника и наука, № 9, 1983, стр.7.
[21] Техника и наука, 1984, №4, стр. 20-21.
[22] «Доклады АН СССР», Т.281, №6, стр.1414, 1985г.
[23] «Знание – сила», июль, 1984, стр.23

Отметим, что запись этого закона аналогична записи закона подобия (1). С первого взгляда это может показаться парадоксальным. Но ведь «научные истины, как писал Ф. Энгельс, - всегда парадоксальны, если судить на основании повседневного опыта, который улавливает лишь обманчивую видимость вещей»[24].

Как видно из (3), зависимость m_k от k имеет гиперболический вид:

$$m_k = \frac{const}{k} = \frac{3,5}{k} \qquad (4),$$

const = 3,5 – экспериментальная константа.

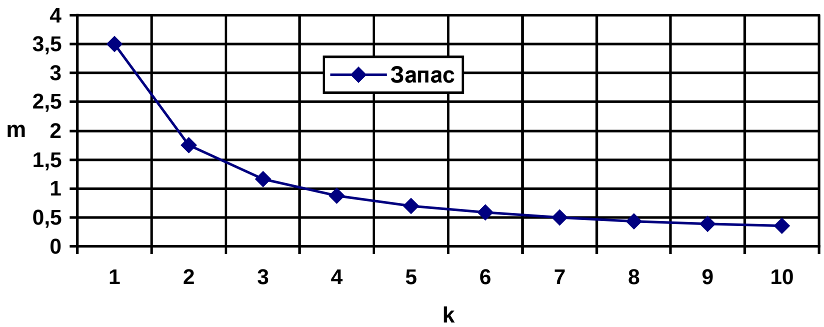

рис.2. Зависимость количества полезных ископаемых (запас m) от ранга классификации (k) в заданном регионе.

Обратно пропорциональная зависимость переменных характеризуется гиперболической зависимостью, то есть график функциональной зависимости представляет собой гиперболу (рис.2). Удельное содержание полезных ископаемых в руде любого ранга классификации $\frac{\Delta m}{\Delta k}$ прямо пропорционально запасам m полезных ископаемых в данном месторождении и убывает с увеличением ранга k.

$$\frac{\Delta m}{\Delta k} = -\,gm \qquad (5),$$

где g - коэффициент пропорциональности.

Соответственно, общее количество запасов полезных ископаемых в регионе:

$$M = \int_1^n \frac{1}{m} dm = -\ln(m)\Big|_1^n \qquad (6).$$

Мы подробно остановились на рассмотрении конкретного примера обратно пропорциональной зависимости переменных, так как данный вид зависимости переменных присущ огромному множеству природных процессов: охлаждение горячей воды, закон радиоактивного распада, поглощение фотонов веществом и

[24] К. Маркс, Ф. Энгельс. Соч. , т. 16, стр. 131.

т.д. Движение точки по траектории симметричной половины равнобокой гиперболы иначе называют «движением Непера»[25]. Поясним физический смысл этого «движения» на примере из механики. Пусть имеется произвольное тело Т, наделенное свойствами двигаться с определенной скоростью вдоль некоторого пути S. Далее, пусть скорость тела Т меняется в зависимости от пройденного пути, или точнее, от расстояния, которое необходимо еще преодолеть. Если взять за единицу времени $\Delta t = 1$ сек, то данное тело будет проходить этот интервал времени со скоростью $\frac{\Delta S}{\Delta t} = v$. Если бы движение тела было равномерным, то *скорость* v всегда оставалась бы постоянной. На графике такое движение характеризуется тангенсом (tg) угла наклона прямой линии, т.е. тангенсом угла, образованного данной прямой и направлением оси Ох (см. рис. 3).

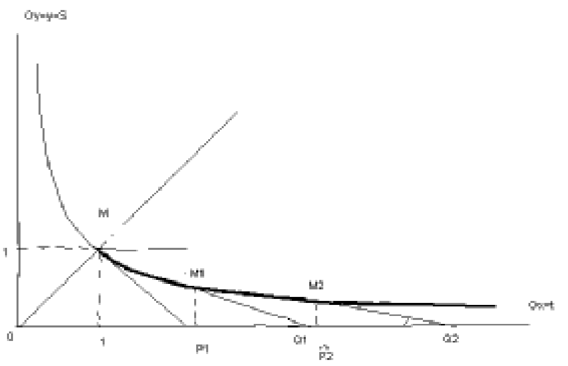

рис.3. График функции «движение Непера».

Так как движение неравномерное, то и мгновенная скорость представляется как тангенс угла наклона касательной в соответствующей точке графика. В силу указанного специального закона движения, в каждый момент времени t, t_1, t_2…, соответствующие тангенсы tgα, tgα_1, tgα_2…, должны быть численно равны соответствующим ординатам PM =y, PM1=y_1, PM2=y_2, … Таким образом, для каждой точки М графика, или же для каждого момента движения, имеет место равенство

$$\mathrm{tg}\alpha = y \qquad (7).$$

То есть, скорость v(t) = s, равна длине пути. На нашем графике все временные отрезки PQ, P_1Q_1,…. равны 1. Интересно, что путь, пройденный телом за

[25] И.Б. Абельсон. Рождение логарифмов. ОГИЗ, ГОСТЕХИЗДАТ.,М., 1948, стр.158.

единицу времени, соответствует числу «е». Значение числа «е» рассчитывается по формуле:

$$e = \lim\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \text{ при } x \to \infty \quad (8).$$

Гораздо позднее, через 130 лет после смерти Джона Непера, великий математик Леонард Эйлер в своем сочинении «Введение в анализ бесконечно малых» (1748г.) дал замечательную формулу для числа е:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{1*2*3} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots \quad (9).$$

Кривая Непера, полученная им на основании сравнения геометрической и арифметической прогрессии, имеет широкое применение в технических науках: в электротехнике, теплотехнике и др. Например, охлаждение нагретого тела происходит по экспоненциальному закону. В данном случае мы проиллюстрировали подобие сложных математических структур (функциональных зависимостей) природным процессам, протекающим во времени и пространстве. Интересно, но уже у старых французских математиков Орезма (1328 – 1382) и Шюкэ (его книга вышла в свет в 1489г.) впервые встречается сопоставление арифметической и геометрической прогрессий. Вполне отчетливо это сопоставление высказано в «Общей арифметике» Михаила Штифеля, вышедшей в 1544г.[26] Приблизительно через 70 лет после выхода книги Штифеля, его идея была воплощена в жизнь одновременно и независимо друг от друга двумя математиками: швейцарцем Бюрги и шотландцем Непером. При этом Непер ввел само понятие логарифма и высказал ряд глубоких мыслей, сыгравших немалую роль в дальнейшем развитии математики. Блестящая идея Непера – новый тип связи двух переменных, новая функциональная зависимость, прекрасна сама по себе, как замечательное теоретическое достижение. Вместе с тем, она теснейшим образом связана с практическими вычислениями; таким образом, получилось гармоническое сочетание теории и практики. Исследованиями Непера было положено начало дифференциальному исчислению бесконечно малых величин.

Еще один пример математической аналогии в астрономических соотношениях Солнечной системы поражает воображение. Гармония структуры и движений планет Солнечной системы, та «музыка сфер», что не давала покоя Иоганну Кеплеру, приводит в душевный трепет не только поэтов и музыкантов, но и непосвященных. Более двухсот лет классическая небесная механика хранит величественное молчание по поводу эмпирического правила Тициуса- Боде (закона планетных расстояний), устанавливающего зависимость между расстояниями планет от Солнца. В 1766 году немецкий математик Даниель Тициус установил правило, связывающее расстояние планет от Солнца, выраженное в астрономических единицах:

- к каждому члену геометрической прогрессии со знаменателем q = 2

0; 3; 6; 12; 24; 48; 96; 192; 384

[26] Там же, стр.132.

прибавляется число 4 и суммарное число делится на 10. Получается новая последовательность чисел:

0,4; 0,7; 1,0; 1,6; 2,8; 5,2; 10,0; 19,6; 39,8

с точностью до 2,5% представляет расстояния от Солнца в астрономических единицах (Нептун выпадает из этой последовательности). Это расстояние можно посчитать по простой формуле: $S = 0{,}3(0{,}1333(3) + 2^n)$ (n = 0, 1, 2, 3, …..).[27]

Идея музыкальной гармонии Солнечной системы оказалась очень живучей. В своей основе она дошла до средних веков. В 1642 году, спустя две тысячи лет после Пифагора, Томас Браун писал: «Музыка есть повсюду, где есть гармония, порядок, пропорция, и до сих пор мы можем считать, что существует музыка сфер, так как упорядоченные движения и правильные интервалы, хотя и не воспринимаются слухом, но исполнены гармонии нашего разума».

Возможно, что идея о всеобщей гармонии во Вселенной, выраженная образно пифагорейской «музыкой сфер», побудила И. Кеплера (1571 – 1630) искать закономерности в движении планет Солнечной системы. Он сопоставил периоды обращения планет с их расстояниями от Солнца (в относительных единицах). Для периодов обращения Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна получился ряд чисел:

0,24; 0,615; 1,00; 1,88; 11,86; 29,457.

Расстояние этих планет от Солнца выражалось рядом чисел:

0,387; 0,723; 1,00; 1,524; 5,203; 9,539.

Возведя числа первого ряда в квадрат, а числа второго ряда – в куб, он получил два практически одинаковых ряда.

Так был установлен один из важнейших законов механики небесных тел – третий закон Кеплера, который гласил: «Квадраты звездных периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит».[28]

3. Пропорции, оптимальные соотношения, числовые константы и числа Фибоначчи.

О гармонии, удивительных математических соотношениях, связывающих между собой известные числовые константы, золотой пропорции, больших числах и пр. – написано много статей, научных и научно-популярных книг. Но на вопрос «Почему» природа выбрала в качестве инвариантов и соотношений пропорций именно такие числа ответа до сих пор не существует.

К понятию «золотая пропорция» в наибольшей степени подходит определение «формула красоты». Действительно, эта пропорция обладает наиболее отчетливыми признаками гармоничности прекрасного. Эта пропорция знаменует собой как бы вершину эстетических изысканий, некий предел гармонии природы. Эта пропорция не только является господствующей во многих произведениях искусства, она определяет закономерности развития многих организмов, ее присутствие отмечают почвоведы, химики, геологи и астрономы.

Такая универсальность золотой пропорции не делает её простой и доступной для изучения. Многое в сущности этой **«константы гармоничности»** остается неизведанным. Еще неясно, почему Природа предпочла эту пропорцию всем другим — не за ее ли уникальность? Характерно, что золотая пропорция отве-

---

[27] Н. Васютинский. Золота пропорция. М., «Молодая гвардия», 1990, стр.132.
[28] Там же, стр.131.

чает делению целого на две неравные части, следовательно, она отвечает асимметрии. Почему же она так привлекательна, часто более привлекательна, чем симметричные пропорции? Очевидно, эта пропорция обладает каким-то особым свойством. Целое можно поделить на бесконечное множество неравных частей, но только одно из таких сечений отвечает золотой пропорции. По-видимому, в этой пропорции скрыта одна из фундаментальных тайн природы, которую еще предстоит открыть[29]. Исследования различных форм проявления золотой пропорции продолжаются, и в печати периодически появляются все новые и новые публикации. Золотая пропорция — понятие математическое, ее изучение — это прежде всего задача науки. Но она же является **критерием гармонии и красоты**, а это уже категории искусства. В конечном итоге, искусство и наука имеют тесные взаимосвязи и выступают единым фронтом в разгадке тайн природы.

3.1.История возникновения понятия “Золотое сечение”

“Золотая пропорция” или “Золотое сечение” - гармоническое деление отрезка длиной “а” на две части таким образом, что большая его часть “х” является средней пропорциональной между всем отрезком и меньшей его частью:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}\text{, откуда}\quad x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot a = -1{,}618\cdot a\ (\text{или} = 0{,}618\cdot a) \qquad (10)$$

Первые упоминания о золотой пропорции в дошедшей до нас античной литературе встречается во II книге “Начал” Евклида, но задача золотого сечения весьма вероятно была решена еще пифагорейцами, что явилось своего рода жемчужиной пифагорейского учения о числовой гармонии мира. Вся древнегреческая культура развивалась под знаком золотой пропорции. Греки первые установили: пропорции хорошо сложенного человеческого тела подчиняются ее законам, что особенно хорошо видно на примере античных статуй (Аполлон Бельведерский, Венера Милосская). Фригийские гробницы и античный Парфенон, театр Диониса в Афинах - все они исполнены гармонии золотой пропорции. В наши дни интерес к золотой пропорции возрос с новой силой. В целом ряде музыковедческих работ подчеркивается наличие золотого сечения в композиции произведений Баха, Шопена, Бетховена. Сергей Эйзенштейн использовал “Золотое сечение” при монтаже эпизодов своих картин. Академик Г.В. Церетели обнаруживает, что гармония стиха в поэме Шота Руставели “Витязь в тигровой шкуре” подчиняется золотому сечению.

В эпоху Ренессанса золотая пропорция возводится в ранг главного эстетического принципа. Леонардо да Винчи, Рафаэль, Микеланджело, Тициан и другие великие художники возрождения компонуют свои полотна, сознательно используя золотую пропорцию. Нидерландский композитор XV века Якоб Обрехт широко использует “Золотое сечение” в своих музыкальных композициях, которые до сих пор уподобляют “кафедральному собору”, созданному гениальным архитектором.

3.1.1. Естественные науки о “золотой пропорции”

[29] Там же, стр.6 -7.

В XIX веке уже не художники, а ученые-экспериментаторы, изучавшие закономерности филлотаксиса (расположение цветков), вновь обратились к золотой пропорции. Оказалось, что цветки и семена подсолнуха, ромашки, чешуйки в плодах ананаса, хвойных шишках и т. д. "упакованы" по логарифмическим спиралям, завивающимся навстречу друг другу. При этом числа "правых" и "левых" спиралей всегда относятся друг к другу, как соседние числа Фибоначчи (13:8, 21:13, 34:21, 55:34), предел последовательности которых является золотая пропорция.

Наряду с прикладными исследованиями, ученые продолжают активно развивать теорию чисел Фибоначчи и золотого сечения. Советский математик Ю. Матиясевич с использованием чисел Фибоначчи решает 10-ю проблему Гильберта. Возникают изящные методы решения ряда кибернетических задач (теории поиска, игр, программирования) с использованием чисел Фибоначчи и золотого сечения. В США с 1963 года выпускает специальный журнал математическая Фибоначчи-ассоциация.

Выдающимся событием стало открытие в 1964 году Стаховым А.П. и Витенько И.В. обобщенных чисел Фибоначчи и обобщенных золотых сечений. Больше того, открытые на кончике пера эти открытия были подтверждены исследованиями. Так, например, инварианты известных волн электрической активности человеческого мозга равны обобщенным золотым сечениям. Хорошо изученные двойные сплавы обладают ярко выраженными особыми свойствам и (устойчивы в термическом отношении, тверды, износостойки, устойчивы к окислению и т.п.) Только в том случае, если удельные веса исходных компонентов связаны друг с другом одной из золотых обобщенных пропорций. Это позволило белорусскому философу Э.М. Сороко в своей работе "Структурная гармония систем" выдвинуть гипотезу о том, что золотые обобщенные сечения есть числовые инварианты не только человеческого мозга, но и любых самоорганизующих систем. Эта гипотеза (закон гармонии систем) может иметь фундаментальное значение для новой науки, изучающей процессы в самоорганизуемых системах - синергетики.

Одним из путей решения проблемы надежности современных ЭВМ - является введение избыточности. Система счисления с иррациональными основаниями на основе чисел Фибоначчи и золотой пропорции обладает такой избыточностью (кстати, классическая система счисления - двоичная, является частным случаем такого счисления), что позволяет создавать безотказные компьютеры с помехоустойчивыми свойствами.

"Золотая пропорция" обладает удивительными свойствами - избыточностью и устойчивостью, позволяющих, провести соответствие между "золотыми пропорциями" и устойчивыми образованьями. Тогда математическое выражение приобретет философскую окраску:

Так, например, классическое "Золотое сечение"

$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}$ - это отношение количественной характеристики "х" противоположности, выражающей сущность предмета или явления, к количественной характеристике "(а-х)" другой противоположности. Это отношение равно отношению количественной характеристике "а" всего предмета или явления, к количественной характеристике "х" противоположности, выражающей сущность предмета.

Иначе говоря, оптимальным для устойчивости предмета является такое "угнетение" одной из противоположностей другой, которое равно "угнетению" всего предмета или явления этой "угнетающей" противоположности.

Если подводить под такое же философское определение "Обобщенные золотые сечения", то их математическое выражение: $\left(\frac{a}{x}\right)^s=\frac{x}{a-x}$, (где s=1,2,3,...... – порядок золотого сечения) будет

выражать то же, что и классическое, только "s"в данном случае будет означать степень влияния всего или явления на противоположность, определяющую сущность предмета или явления. Эта степень, как бы определяет количество обратных связей, которыми количественные характеристики всего предмета или явления связаны с данной противоположностью.

S	0	1	2	3	4	5	6	7	…	n
X	0.5	0.618	0.683	0.725	0.755	0.778	0.797	0.812	…	1

Причем, решения уравнений "Обобщенных золотых сечений"позволяют сделать вывод о том, что увеличение количества обратных связей "предмет - противоположность" приводит к увеличению влияния данной противоположности на остальную часть предмета или явления. Парадоксальность данного вывода покажется не настолько вызывающей если вспомнить, что "Золотое сечение", как классическое, так и обобщенные принадлежат к устойчивым состояниям предмета или явления, и тогда данный вывод является непреложным правилом равновесия между господствующим положением одной из противоположностей и контролем всего предмета, как совокупности свойств, над этой противоположностью[30].

По современным представлениям классическое золотое сечение есть не что иное, как частный случай группы обобщенных золотых сечений, а классиче-

[30]Б.Б.Косенок. Философское обоснование понятия"золотая пропорция". Куйбышев,1990. http://www.n-t.org/tp/iz/zs.htm,

ский ряд Фибоначчи (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...) - частный вариант обобщенных рядов Фибоначчи. В качестве обобщенных золотых сечений, представляющих противоположности в самоорганизующихся системах, выступают (по отношению к нормированию) - 0,500+0,500=1, 0,382+0,618=1, 0,318+0,682=1, 0,275+0,725 и т.д.

Возможно, что все сложные самоорганизующиеся системы в характерные моменты развития последовательно связаны с теми или иными обобщенными золотыми сечениями, а классическое сечение - 0,382+0,618=1 - является своего рода вершиной оптимизации («половозрелое» состояние). Исходя из этого предположения, можно было бы сказать, что обобщенные золотые сечения отображают своего рода "лестницу золотых гармоний" от «зиготы до половозрелого организма». По-видимому, при этом в характерных точках, как считает Э.М.Сороко[31], "самоорганизующаяся система обретает меру структурного оптимума, достигает адекватного ее предназначению уровня разнообразия в строении и соответственно - функциональной эффективности и продуктивности". Как пишут В.И.Коробко и В.В.Очинский, "путь, который проходит система в своем развитии,...должен быть подчинен экстремальному принципу, т.е. система развивается по геодезическим линиям между стационарными точками...Есть все основания полагать, и это находит подтверждение в исследованных частных случаях, что составляющие отношения золотой пропорции числа определяют относительные стационарные значения системы функционалов, отвечающим экстремальным принципам..."

3.2. Оптимальные соотношения и гармония в природе.

Идея оптимальности в науке не нова. В 1744 году П. Мопертьюи (1698-1759) выдвинул принцип наименьшего действия. Согласно этого принципа, "количество действия, которое допускает произведенное изменение, является наименьшим возможным". Огромный вклад в последовательное развитие принципа наименьшего действия внесли выдающиеся математики 18-19 в.в. Л.Эйлер (1706-1783), Ж.Лагранж (1736-1813), У.Р.Гамильтон (1805-1865) и М.В.Остроградский (1801-1861). Благодаря работам этих ученых принцип оптимальности нашел применение в механике, а затем и в физике. Понятие оптимальности теснейшим образом связано с методом вариационного исчисления. Основу вариационного анализа, имеющего целью нахождение наилучшего решения задачи из множества возможных, заложил выдающийся математик 18 века Л.Эйлер. Он показал, что найти выражение, которое должно быть максимумом или минимумом для каждой частной задачи, можно тогда, когда уже известно решение этой задачи, проведенное исходя из общих принципов механики, формулирующих причинно-следственные связи явлений. Л.Эйлер развил и научно сформулировал принцип наименьшего действия в механике. "В мире, - утверждал Эйлер, - не происходит ничего, в чем не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума".

В 20 веке правильность этого заключения находит многочисленные подтверждения. Как писал М.Борн, "свойства минимальности мы встречаем во всех разделах физики и они являются не только верными, но и крайне целесообразными...для формулировки физических законов". Вариационный подход использовался при изучении самых разнообразных физических проблем. О

[31] Сороко Э.М. Структурная гармония систем. - Минск: Наука и техника, 1984. 264 с.

важных следствиях этого факта пишет в своей книге Г. Голдстейн: "...почти во всех областях физики для вывода "уравнений движения" (физических систем).. могут быть использованы (вариационные) принципы. Поэтому, когда принцип (такого рода) принимается за основу формулировки физических законов, обнаруживается, что различные области физики обладают, по крайней мере в некоторой степени, структурной аналогией". Это положение представлено в известных принципах наименьшего действия Гаусса, Гамильтона- Остроградского, виртуальных перемещений и т.д. В свое время "Пуанкаре и Планк сказали, что будучи значительнее принципа сохранения энергии, (принцип наименьшего действия) дает возможность предусмотреть и предопределить целостную эволюцию как отдельной физико-химической системы, так и Вселенной".

Как известно, математической моделью экстремальных принципов являются функционалы, в рамках которых происходит развитие процессов, связанных с достижением предельных значений. Устойчивым, стационарным значением функционала является его минимальное значение, определяемое числом. Оказалось, что все основные уравнения движения систем, с которыми оперирует физика (законы Ньютона, Максвелла, Шредингера), определяют траектории, являющиеся экстремалями некоторых функционалов. Этот чисто математический результат имеет, по мнению Н.Н.Моисеева, глубокий философский смысл. Если бы мы жили "в другой Вселенной с другими законами физики, - пишет академик Моисеев, - все равно там были бы свои вариационные принципы, а значит, и своя "высшая целесообразность". В наши дни дальнейшее развитие вариационного метода представлено принципом минимума диссипации энергии, выдвинутым Н.Н.Моисеевым. Можно сказать, что в настоящее время уже сложилось понимание того факта, что принцип наименьшего действия является системным феноменом и в биологии. В современной методологии на передний план выступают вопросы, непосредственно связанные со структурной гармонией систем. Эта проблема приобретает все большее значение в науке и хозяйственной деятельности человека. По общепринятому определению "гармония - соразмерность частей и целого, слияние различных комплексов объекта в единое органическое целое". К сожалению, в этом определении отсутствует критерий, по которому объект (в частности, живую систему) следует считать гармоничным. По-видимому, критерий гармонии может быть установлен исходя из соотношения противоположностей в объекте.

Идея о гармоничности мира (и систем), связанная с отношениями противоположностей внутри объекта, восходит от философов Древней Греции. "Бог, - учили пифагорейцы, - положил числа в основу мирового порядка. Бог - это единство, а мир - множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству и создает все в космосе, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях...". Пифагор первым поверил в рациональное устройство мироздания и возможность описания этого устройства с помощью чисел и их отношений. Математика, таким образом, впервые становится орудием познания мира. Обоснование мировой гармонии, образуемой движущимися планетами, исчисление гармонических пропорций, аналогии между гармонией микро- и макрокосмоса, представленное великим ученым средневековья И.Кеплером, говорит о связи последнего с воззрениями пифагорейцев. В наши дни идея гармонии систем приобретает все большее признание. "Гармония, - указывает Э.М.Сороко, - не обладает каким-либо смыслом вне противоречивости"[32]. "Великая карта оптимальных состояний природы, - пишет Э.М.Сороко, - согласно которой та создает свои порядки, написана языком противоположностей, контрарностей, противодействий"[33]. Очевидно, что гармония, оптимальность и золотое сечение - понятия, тесно связанные между собою[34].

3.3. Некоторые примеры взаимосвязи числовых констант и подобия функциональных выражений.

3.3.1.Идеи Гермеса Трисмегиста, изложенные в Изумрудной Скрижали, принцип подобия … касаются всего нашего мироздания. Аналогии и подобие физических объектов, аналогии и подобие математических объектов…. Обладая своей внутренней логикой развития, математика не нуждается в экспериментальных подтверждениях и физических или иных приложений своих выводов[35].

Связь экспоненты с тригонометрическими функциями установил еще великий Эйлер посредством совсем уж странного «числа» - мнимой единицы:

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1} \qquad (11).$$

Эта связь выражается знаменитой формулой Эйлера:

$$e^{ia} = \cos a + i \sin a \qquad (12).$$

Если принять значение α = π, то получим замечательное уравнение, связывающее число Непера e с число $\pi = \frac{l}{D} = 3{,}1415926...$:

$$e^{ip} = -1 \qquad (13).$$

Более того, можно получить связь числа Непера с числом Золотой пропорции:

$$e^{i\frac{p}{5}} + e^{-i\frac{p}{5}} = 2\cos\frac{p}{5} = 2\times 0{,}8090169 = 1{,}6180339 \qquad (14).$$

Для числа Непера существует множество выражений, дающие значение числа e с высокой точностью. Но самые известные, это:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad (15),$$

---

[32] Там же, стр.80.
[33] Там же, стр.101.
[34] В.Д. Цветков. Сердце, золотое сечение и симметрия. http://bio.psn.ru/EP/Tsvetkov/vved.html

[35] В.П. Ковтун. Занимательный мир физики. ДЕЛЬТА. СПб., 1997, стр.122.

$$\frac{1}{e}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}, \qquad (16)^{36},$$

$$e = 2\,!\frac{5}{4}!\frac{16}{15}!\frac{65}{64}!\frac{326}{325}!\frac{1957}{1956}!\ldots \quad (17).$$

Необходимо отметить, что формула (15) дает приближение числа e снизу, а формула (16) с отрицательной степенью n – сверху:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}, \qquad (18)^{37}.$$

3.3.2. В общем случае, рациональное число – отношение двух целых чисел – выражается бесконечной периодической (т.е. состоящей из повторяющихся наборов цифр – периодов) дробью. Период дроби принято указывать в скобках:

$$\frac{4}{15}=0,2(6)\ldots \qquad (19).$$

Но бесконечные периодические дроби отнюдь не исчерпывают все возможные представления рациональных чисел при помощи бесконечного набора целых чисел. Рациональные числа можно разложить, например, в непрерывную (цепную) дробь.

Теоретические основы такого разложения были заложены в трудах знаменитого математика Леонарда Эйлера (1707 – 1783).

Конечная непрерывная, или цепная, дробь n – го порядка имеет вид:

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$$

$$\ldots+\frac{1}{a_n}. \qquad (20),$$

или сокращенно, в виде символа : $[a_0;a_1,a_2,\ldots a_n]$.

Разлагая, например рациональное число 4/15 в непрерывную дробь, мы получим следующий результат:

$$\frac{4}{15}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} \qquad (21),$$

[36] Выведено автором, А.Б.©

[37] То же, А.Б. ©

или: $\frac{4}{15} = 0,2(6) = [0;3,1,3]$.

В отличие от рациональных, иррациональное число представимо в виде бесконечной непрерывной дроби. Например, для иррационального числа $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} = [1;2,2,2,\ldots]. \qquad (22).$$

Теперь приведем непрерывные дроби для числовых констант. Число Непера допускает разложение в непрерывную дробь, обладающее высокой правильностью, но отличающееся от канонического разложения (числители дробей отличны от единицы) и поэтому не представимое в виде символа[38]:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \ldots}}}} \qquad (23)$$

Для числа π разложение в непрерывную дробь было найдено лордом-канцлером и хранителем печати Браункером (1620-1684), страстным любителем математики:

$$\frac{p}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \ldots}}}}}} \qquad (24)$$

Не уступающее по красоте разложение в непрерывную дробь получено и для золотого сечение, величина φ которого представляется следующим образом:

$$j = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} \qquad (25),$$

что символьно записывается, как φ = [1;1,1,1,1,…].

3.3.3. О подобии функциональных зависимостей мы уже говорили в разделе о числе Непера. Многочисленные примеры аналогий в физике и математике, в отображении функциональных зависимостей для различного рода природных

[38] В. Гильде, З. Альтрихтер. С микрокалькулятором в руках.Изд. «Мир»., М., 1987, стр.212.

процессов, можно найти у В.П. Ковтуна[39], а аналогии ритма, пропорций, параллелей, последовательностей в музыке, литературном языке и математике - у Б. Варги[40].

В физике, как отмечал Р. Фейнман[41], имеется замечательное совпадение: «Уравнения для самых разных физических условий часто имеют в точности одинаковый вид». Так, дифференциальные уравнения электростатического потенциала, диффузии нейтронов, потока тепла – имеют идентичный вид. Но, почему уравнения для разных явлений природы так похожи? Не связано ли это с тем математическим приближением, которое демонстрируют нам дифференциальные уравнения? Как известно, дифференциальные уравнения описывают непрерывный мир, мир непрерывного пространства и времени. Действительно, в области малых скоростей (много меньше скорости света), относительно больших расстояний и длительностей процессов, гладких распределений, непрерывных потоков, движение описывается удовлетворительно при помощи дифференциальных уравнений – непрерывных функций.

Например, уравнения электростатики оказываются правильными на расстояниях, вплоть до 10^{-14} см, но затем они начинают выглядеть неправильно[42].

Что, если мир в микро - и макро масштабах отличен от непрерывного мира человеческих ощущений? Не потому ли современная математика с ее гладкими функциями, непрерывностью и монотонностью не работает на этих масштабах. Возможно, нужен иной подход к описанию реальности малых и больших размеров. Возможно, что дискретность малых и больших физических величин как-то обозначится и в математике и разрешит проблему расходимостей в физике. Хотя, нужно сразу отметить, что непрерывность и дискретность природы всецело зависит от перцептивных и сенсорных ощущений человека. Следовательно, и современный математический аппарат отражает в себе абстрактное мышление человека в соответствующих образах и символах математики. Наиболее общая характеристика непрерывности материи – это ее целостность, определяемая внутренним непрестанным движением и постоянным внешним становлением. Дискретность же материи, напротив, характеризуется целостностью при очень слабых внешних движениях, ее изменениях. Восприятие дискретности и непрерывности у человека зависит как от скорости протекания того или иного процесса, так и пространственно-временных масштабов материи и его наблюдения. И это восприятие всецело зависит от перцептивного отображения реального процесса в сознании. Мы знаем из повседневного опыта, что чем выше скорость процесса, тем непрерывнее нам он кажется. Например, вращение колеса со спицами. Опыт также подсказывает нам, что непрерывные, на удалении, объекты, оказываются дискретными вблизи. Дискретность времени человек не ощущает, течение времени кажется непрерывным. Ощущение дискретности времени у человека формируется по истечении длительных промежутков времени. Поясним последнее на примере. Не задумываясь о течении времени, в обыденной обстановке, человек, занятый привычными делами, не фиксирует ежеминутно, ежесекундно и т.д. течение времени. И только мысленным взглядом в «прошлое» человек осознает и течение времени и его искусственную меру дискрет-

[39] В.П. Ковтун. Занимательный мир физики. Дельта. СПб, 1997, стр. 240.
[40] Б.Варга, Ю. Димень, Э. Лопариц. Язык, музыка, математика. Изд. «Мир»,М., 1981, стр.247.
[41] Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. Т.5.,М., «Мир», 1977, стр.236.
[42] Там же, стр.257.

ности (часы, дни, недели, годы…), связанную с циклами природных изменений. Поэтому, в качестве определения непрерывности и дискретности могут быть положены свойства материи – скорость изменения движения, свойств, положения и т.д.; - пространственно-временные масштабы материи.

Далее: 1. О линейных числах Пуансо.
2. О дробной размерности.
3. О бесконечном и о единице.
4. О представлении бесконечности и единичного.