

ЧИСЛО π В МАТЕМАТИКЕ И В ЕСТЕСТВОЗНАНИИ

И ПСЕВДОПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Баяндин А.В.

1. Древнейшие, известные человечеству письменные памятники, содержащие правила для определения площадей, объемов были составлены в Египте и Вавилоне около 4 тысяч лет назад. Древние вавилоняне довольствовались тем, что заменяли важную геометрическую величину π (отношение длины окружности к диаметру) ее приближенным значением, равным 3. Такое приближение отвечало потребностям строительного искусства и землемерия того времени.

В одном древнеегипетском папирусе для числа π приводится гораздо более точное приближение $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.16049$.

Только в середине 3 века до н.э. Архимед (287 – 212г.г.) строго доказал, что число π заключено между $3\frac{1}{7}$ и $3\frac{10}{71}$ (неравенство Архимеда) [1].

Китайский математик Цзу Чун – Чжи (2-ая половина V века) получил для π приближение 3.1415927, вновь найденное в Европе значительно позднее (XVI век); аль-Каши (1-ая половина XV века) вычислил 17 десятичных знаков числа π .

В XVI веке голландский математик Лудольф ванн Цейлен вычислил 35 знаков числа π после запятой. В XIX веке англичанин Уильям Шенке затратил изрядную часть своей жизни на вычисление числа π с более чем семьюстами знаками.

В 60-ые годы XX столетия ЭВМ понадобилось мене 4,5 часов, чтобы вычислить более 100 000 знаков числа π . В основу программы была положена формула Гаусса [2]:

$$\pi = 48\arctg\frac{1}{18} + 32\arctg\frac{1}{57} - 20\arctg\frac{1}{239} \quad (1)$$

а значения арктангенса вычислялись при помощи разложения в степенной ряд:

$$\arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (2)$$

Конечно, для практических расчетов требуется значительно меньшее количество знаков числа π . Так, дробь $355/113 = 3.1415929$ дает приближение числа с ошибкой меньше, чем $3 \cdot 10^{-7}$ [3].

2. Наряду с поиском точных знаков числа π математиков всегда интересовали математические выражения, дающие приближения числа π со сколь угодно необходимой точностью. Одно из них уже встречалось нам в начале этой статьи, это формула Гаусса. Со времени Ф. Виета (XVI век) разыскание пределов некоторых арифметических последовательностей, составленных по простым законам, приводило к этому же числу π . [4]
Например, Лейбницем [4] найден для геометрической прогрессии:

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (3)$$

при $x = (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}$ следующий ряд:

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} + \dots = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \quad (4)$$

Джон Валлис (1616 – 1703г.г.) – английский математик, получил формулу, выражающую число π в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots} \quad (5)$$

Из этой формулы может быть получена другая:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{8 \cdot 24 \cdot 48 \cdot 80 \dots}{9 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 81 \dots} \quad (6)$$

Где в знаменателе стоят квадраты нечетных чисел, начиная с 3, а числитель каждого множителя на единицу меньше соответствующего множителя знаменателя [5].

Интересное разложение в непрерывную дробь для знаменитого числа π найдено лордом - канцлером и хранителем печати Браункером (1620 – 1684г.г.), страстным любителем математики:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}} \quad (7)$$

Кроме двоек выражение (7) содержит только квадраты нечетных чисел [3].

***“Есть тонкие властительные связи
меж контуром и запахом цветка.”
(В.Я.Брюсов, “Сонет к форме”).***

Еще удивительнее – связи между числами. Так, число π и число e встречаются вместе в вопросах теории вероятностей, точнее – в гауссовом распределении вероятностей:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (8)$$

Поразительна, по своей красоте, формула Эйлера, в которую помимо чисел π и e входит мнимая единица [6]:

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0 \quad (9)$$

4. Еще одно выражение для числа π получается при анализе зависимости изменения величины дуги окружности от значения стягивающей хорды.

Рекуррентные соотношения для упомянутых величин получены мной при решении задачи отображения дуги полукруга радиуса R , нулевой толщины, в отрезок прямой длиной, равной R .

Полукруг, изображенный на рис.1, был мысленно свернут n раз пополам. При этом, для каждого последовательного мысленного перегиба полукруга были получены выражения соответствующих отношений длины дуги и стягивающей хорды:

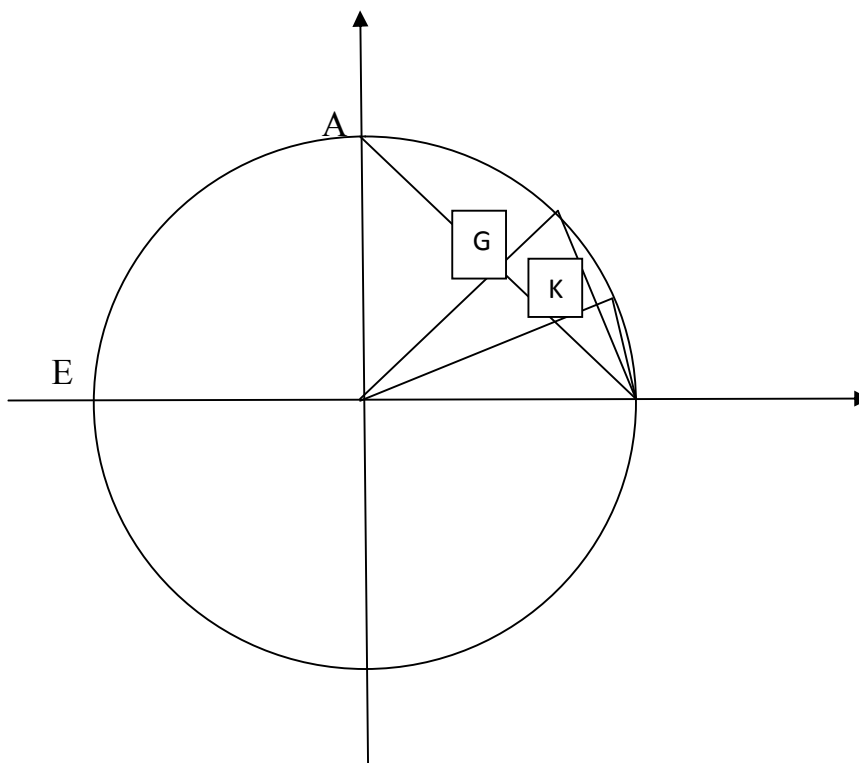


Рис.1

$$\frac{\cup ED}{ED} = \frac{\cup L_0}{H_0} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\cup AD}{AD} = \frac{\cup L_1}{H_1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \quad \frac{\cup FD}{FD} = \frac{\cup L_2}{H_2} = \frac{\pi}{2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}}; \quad \frac{\cup HD}{HD} = \frac{\cup L_3}{H_3} = \frac{\pi}{2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}};$$

(10) и т.д.

В итоге была получена следующая рекуррентная формула:

$$\frac{\cup L_n}{H_n} = \frac{\pi}{2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \sqrt{2_4 + \dots + \sqrt{2_n}}}}}}; \quad (11)$$

Так, при $n=1$ длина хорды равна $H_1 = R \cdot \sqrt{2}$, а – дуги $\cup L_1 = \frac{\pi \cdot R}{2}$;

$n=2$, $H_2 = R \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $\cup L_2 = \frac{\pi R}{4}$ и т.д.

В пределе, при $n \rightarrow \infty$, отношение (11) стремится к единице:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cup L_n}{H_n} = 1 \quad (12).$$

Учитывая (12) из (11) получим выражение для числа π :

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \dots + \sqrt{2_n}}}} \quad (13)$$

Или опуская символ $\lim$ и, подразумевая, что $n \rightarrow \infty$:

$$\pi = 2^n \cdot \sqrt{2_1 - \sqrt{2_2 + \sqrt{2_3 + \dots + \sqrt{2_n}}}} \quad (14)^1.$$

Анализ полученной формулы интересен уже сам по себе. Во-первых, в отличие, например, от известной формулы (7) в полученном выражении содержатся только одни двойки а степени и под корнем.

Во-вторых, выражение содержит произведение двух функций:

- показательной функции $F(n) = 2^n$,

- степенной функции $X_n^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2_n}}}}$ представленных на

рис.2.

¹ Данная простая формула выведена мной примерно в 1987г. В таком виде – послана в редакцию журнала «КВАНТ» в 1989г. Ответ редакции «КВАНТа» приведен в ПРИЛОЖЕНИИ.

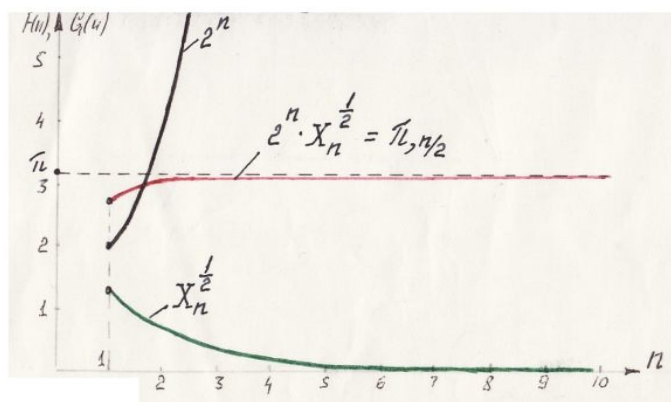


Рис.2.

Выражение (14) носит название «формулы» Антифонта, греческого математика V века до н.э.²

Предел произведения этих функций и, соответственно, приближение числа π представляет собой неопределенность (13) вида: $\infty \cdot 0$ и замечателен уже тем, что объединяет бесконечно большие и бесконечно малые величины в одном иррациональном числе π .

Прежде, чем рассмотреть численный результат полученной формулы, проведем анализ обобщенной формулы:

$$K(n) = q^n \cdot \sqrt{q_1 - \sqrt{q_2 + \sqrt{q_3 + \cdots + \sqrt{q_n}}}} \quad (15).$$

Целесообразно анализ начать с выражения под корнем, а именно, с бесконечного корня:

$$X_n = \sqrt{q_2 + \sqrt{q_3 + \sqrt{q_4 + \cdots + \sqrt{q_n}}}} \quad (16).$$

² Формула Антифонта. http://altera-pars.narod.ru/Qadra/form_A.htm

При $n \rightarrow \infty$ можно записать:

$$x = \sqrt{q + x}, \quad \text{или} \quad x^2 - x - q = 0 \quad (17)$$

$$\text{где } q = x(x-1), \quad (18)$$

$$a \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4q}}{2} \quad (19).$$

В частности, в нашем случае, при $q = 2$ получаем $x = 2$, т.е. представленное решение (19) является пределом выражения (16) при $n \rightarrow \infty$.

При $q = 1$ из (19) и, соответственно, из (16) получим $x = 1.6180339\dots$, так называемое число, характеризующее **золотое соотношение** (сечение отрезка прямой на две неравные части).

Подставив $q=1$ и $q=2$ в выражение (16) получим следующие значения:

$$1,6180339\dots = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}} \quad \text{и} \quad 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} \quad (20).$$

Необходимо также отметить, что число 2 для формулы (15) является оптимальным. Последнее можно пояснить на примере анализа выражения:

$$Y(n) = \sqrt{q_1 - \sqrt{q_2 + \sqrt{q_3 + \dots + \sqrt{q_n}}}} \quad (21).$$

При $n \rightarrow \infty$ найдем значение q , при котором $Y = 0$. Для этого подставим (19) в отрицательную часть подкоренного выражения (21):

$q - \frac{1 + \sqrt{1+4q}}{2} = 0$, решая это уравнение, получим значение $q = 2$. Что и требовалось доказать.

Следовательно, только для $q = 2$ формула (15) дает приближение для числа π .

Используя формулу (18): $q = x(x-1)$ выражение (16) приобретает следующую форму:

$$x = \sqrt{x(x-1) + \sqrt{x(x-1) + \sqrt{x(x-1) + \dots + \sqrt{x(x-1)}}}} \quad (22).$$

Интересно, что бесконечный квадратный корень выражения (22) дает приближение ко всем произвольным целым числам натурального ряда за

исключением нуля и единицы. Так как при $q = x(x-1) = 1$ значение $x = 1,6180339$, о чем мы уже упоминали выше в этой статье. И, что парадоксально, при $x = 1$, т.е. при $q = 0$ выражение (22) приобретает совсем уж «странный» вид:

$$1 = \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \dots + \sqrt{0}}}}} \quad (23).$$

Естественно, что это не так. Под значением 0 здесь нужно понимать бесконечно малую величину.

Сведем рассчитанные значения для формулы (16)

$$X_n = \sqrt{q_1 + \sqrt{q_2 + \sqrt{q_3 + \dots + \sqrt{q_n}}}}, \text{ где } q \text{ принимает значения чисел}$$

натурального ряда, в таблицу:

Таблица 1.

q	$q = x(x-1)$	X_n
0	0	1
1		$\varphi = 1.6180339$
2	2	2
3		2.3027756
	6	3
4		2.5615528
	12	4
5		2.7912878
	20	5
6		3
	30	6
7		3.1925824
	42	7
8		3.3722813
	56	8
9		3.5413812
	72	9
10		3.7015621
	90	10
11		3.8541019
	110	11
12		4
	132	12
13		4.1400549

	156	13
14		4.2749172
	182	14
15		4.4051248
	210	15

Приведенные значения X_n в Таблице 1, соответствующие аргументам q , обладают, как и золотое соотношение $\varphi = 1.6180339$, хотя это и очевидно из приведенного выше анализа, удивительным свойством: *квадрат значения X_n не изменяет значения мантиссы* этого числа и равен:

$$X_n^2 = q_n + X_n \quad (24).$$

Так, например, $X_{11}^2 = (3.8541019)^2 = 14.8541019 = q_n + X_n = 11 + 3.8541019$.

Из (24) следует, что:

$$q_n = X_n^2 - X_n = X_n(X_n - 1) \quad (25).$$

Например, $1 = 1.6180339 \cdot 0.6180339 = X_1(X_1 - 1)$; $3 = 2.3027756 \cdot 1.3027756$;
 $4 = 2.5615528 \cdot 1.5615528$ и т.д.

Как известно, пара целых чисел, отличающихся на 1 (единицу) друг от друга, при перемножении образуют «площадь» прямоугольника и, поэтому, называются *прямоугольными числами*. Произведение этих чисел можно представить рекуррентной формулой вида: $q = x(x-1)$. Ряд чисел, образованных по этой формуле, имеет только четные числа в своем составе. Причем, промежутки между этими числами в данном ряду неуклонно возрастают, а количество «неиспользованных» целых чисел находится по формуле:

$$q_i - q_{i-1} - 1 = n_{i(i-1)} \quad (26).$$

Нетрудно заметить, что эти «неиспользованные» целые числа представляют собой произведения иррациональных чисел, отличающихся друг от друга на 1 (единицу) и имеющие одинаковую мантиссу:

$1 = 1.6180339 \cdot 0.6180339 = X_1(X_1 - 1)$; $3 = 2.3027756 \cdot 1.3027756$;
 $4 = 2.5615528 \cdot 1.5615528$ и т.д.

Таким образом, можно назвать найденные иррациональные числа, в отличие от прямоугольных чисел – *псевдопрямоугольными числами*.

ПРИЛОЖЕНИЕ.



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
АКАДЕМИЯ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР
РЕДАКЦИЯ ЖУРНАЛА «КВАНТ»

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.
Тел. 250-31-73

630129 Новосибирск,
ул. Курчатова, II, кв. II8
А.В.БАЯНДИНУ

29.05.89 № _____

На № _____

Уважаемый Александр Васильевич!

В Вашей статье приведен ряд формул для числа π . Часть из них содержится в принятой к опубликованию в шестом номере журнала заметке Купцова. Часть из них, содержащая бесконечные ряды и цепные дроби, заслуживает отдельного разговора в рамках специальных статей. Ваша же формула с корнями из 2 кажется нам слишком простой – ее механизм состоит просто в приближении длины окружности периметром вписанного правильного 2^n -угольника. Поэтому Ваша статья не рекомендуется к печати.

С уважением,

зав. отделом математики

С.Л. Табачников

С.Л.Табачников

